RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA - przykłady i zadania

klasa III 2019/20

Adam Stachura

RP Zadania 1 - aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

ZADANIE 1. Udowodnić, że dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$ zachodzi równość:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

ZADANIE 2. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(A \cup B)$, jeżeli $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{10}$.

ZADANIE 3. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(A \cup B)$, jeżeli $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A' \cup B') = \frac{5}{6}$.

ZADANIE 4. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$, jeżeli $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$.

ZADANIE 5. Udowodnić, że dla dowolnych zdarzeń $A, B, C \subset \Omega$ zachodzi równość:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

ZADANIE 6. Wiadomo, że $P(A) = \frac{7}{10}$, $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(C') = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{15}$, $P(B \cap C) = \frac{3}{10}$, $P(A \cap C) = \frac{4}{15}$, zaś zdarzenie $A \cup B \cup C$ jest zdarzeniem pewnym. Obliczyć $P(A \cap B \cap C)$.

ZADANIE 7. Zaproponować wzór na prawdopodobieństwo sumy n zdarzeń losowych.

ZADANIE 8. Wiadomo, że $P(B') = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ oraz $P(A' \cup B') = \frac{5}{6}$. Obliczyć $P(A)$, $P(B)$ i $P(B \setminus A)$.

ZADANIE 9. Wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$. Czy zdarzenia A i B mogą się wykluczać?

ZADANIE 10. Wiadomo, że $P(A) = 0,75$, $P(B) = 0,5$. Czy może się zdarzyć, że $P(A \cap B) < 0,4$?

ZADANIE 11. Udowodnić, że jeżeli $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym i zachodzi równość: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, to albo $P(A) = 1$, albo $P(B) = 1$.

ZADANIE 12. Udowodnić, że jeżeli $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym i $P(A \cap B) > \frac{1}{2}$, to $P(A) + P(B) > \frac{3}{2}$.

ZADANIE 13. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(B)$, jeżeli wiadomo, że $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A) = 3P(A \cap B)$ i $P(A) > 0$.

RP Zadania 1 - aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa. Rozwiązania

ZADANIE 1. Udowodnić, że dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$ zachodzi równość:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Rozwiązanie. Zdarzenie A jest sumą dwóch rozłącznych zdarzeń - są to zdarzenia $A \setminus B$ oraz $A \cap B$:

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B), \tag{1}$$
$$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset.$$

Podobnie, mamy:

$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B), \tag{2}$$
$$(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

(bo $(A \cap B) \cup (A \cap B) = A \cap B$.) Tak więc zdarzenie $A \cup B$ jest sumą trzech parami rozłącznych zdarzeń: $A \setminus B$, $B \setminus A$ oraz $A \cap B$, i dlatego

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B). \tag{3}$$

Ze wzoru (1) otrzymujemy równość

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B),$$

a stąd

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Ze wzoru (2) otrzymujemy równość

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B),$$

a stąd

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B).$$

Wstawiając to do wzoru (3) ottrzymujemy:

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B),$$

czyli

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)\,,$$

a to właśnie należało udowodnić.

ZADANIE 2. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(A\cup B)$, jeżeli $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A\cap B) = \frac{3}{10}$.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

(zob. tekst **RP2**, twierdzenie **1**, pkt. (c)). Wstawiamy tu dane:

$$P(A\cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}.$$

Odpowiedź: $P(A\cup B) = \frac{7}{10}$.

ZADANIE 3. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(A\cup B)$, jeżeli $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A'\cup B') = \frac{5}{6}$.

Rozwiązanie. Korzystamy z prawa de Morgana rachunku zbiorów (zob. tekst **RP1**):

$$A'\cup B' = (A\cap B)'\,,$$

a stąd i z twierdzenia **1**, pkt.(b) z tekstu **RP2** otrzymujemy równości:

$$P(A'\cup B') = P\left[(A\cap B)'\right] = 1 - P(A\cap B)\,,$$

czyli

$$\frac{5}{6} = 1 - P(A\cap B)\,.$$

Stąd $P(A\cap B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

Teraz korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zbiorów (tekst **RP2**, twierdzenie **1**, pkt. (c)):

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = 1.$$

Odpowiedź: $P(A\cup B) = 1$.

ZADANIE 4. Obliczyć prawdopodobieństwo $P\left(A \cap B\right)$, jeżeli $P\left(A\right) = \frac{1}{2}$, $P\left(B\right) = \frac{2}{3}$, $P\left(A \cup B\right) = \frac{3}{4}$.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zbiorów (tekst **RP2**, twierdzenie **1**, pkt. (c)):

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right).$$

Wstawiamy dane:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - P\left(A \cap B\right),$$

więc

$$P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{5}{12}.$$

Odpowiedź: $P\left(A \cup B\right) = \frac{5}{12}$.

ZADANIE 5. Udowodnić, że dla dowolnych zdarzeń $A, B, C \subset \Omega$ zachodzi równość:

$$\begin{aligned} P\left(A \cup B \cup C\right) &= P\left(A\right) + P\left(B\right) + P\left(C\right) \\ &\quad - P\left(A \cap B\right) - P\left(A \cap C\right) - P\left(B \cap C\right) + P\left(A \cap B \cap C\right). \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zbiorów (tekst **RP2**, twierdzenie **1**, pkt. (c)):

$$P\left(A \cup B \cup C\right) = P\left[\left(A \cup B\right) \cup C\right] = P\left(A \cup B\right) + P\left(C\right) - P\left[\left(A \cup B\right) \cap C\right] =$$

$$= P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) + P\left(C\right) - P\left[\left(A \cap C\right) \cup \left(B \cap C\right)\right] =$$

$$= P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) + P\left(C\right) - \left[P\left(A \cap C\right) + P\left(B \cap C\right) - P\left(A \cap C \cap B \cap C\right)\right] =$$

$$= P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) + P\left(C\right) - P\left(A \cap C\right) - P\left(B \cap C\right) + P\left(A \cap B \cap C\right),$$

co należało udowodnić.

ZADANIE 6. Wiadomo, że $P\left(A\right) = \frac{7}{10}$, $P\left(B\right) = \frac{3}{5}$, $P\left(C'\right) = \frac{2}{3}$, $P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{15}$, $P\left(B \cap C\right) = \frac{3}{10}$, $P\left(A \cap C\right) = \frac{4}{15}$, zaś zdarzenie $A \cup B \cup C$ jest zdarzeniem pewnym. Obliczyć $P\left(A \cap B \cap C\right)$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $P\left(A \cup B \cup C\right) = 1$. Obliczamy $P\left(C\right)$:

$$P\left(C\right) = 1 - P\left(C'\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Teraz korzystamy ze wzoru z zadania **5**:

$$1 = \frac{7}{10} + \frac{3}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{15} - \frac{4}{15} - \frac{3}{10} + P\left(A \cap B \cap C\right),$$

a więc

$$P\left(A \cap B \cap C\right) = 1 - \frac{7}{10} - \frac{3}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{3}{10} = 0.$$

Odpowiedź: $P\left(A \cap B \cap C\right) = 0$.

ZADANIE 7. Zaproponować wzór na prawdopodobieństwo sumy n zdarzeń losowych.

Rozwiązanie. Ten wzór można zapisać tak:

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n\right) = \sum_{1 \le k_1 \le n} P\left(A_{k_1}\right) - \sum_{1 \le k_1 < k_2 \le n} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2}\right) +$$

$$+ \sum_{1 \le k_1 < k_2 < k_3 \le n} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}\right) -$$

$$- \sum_{1 \le k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \le n} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3} \cap A_{k_4}\right) + ... + (-1)^{n-1} P\left(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n\right).$$

ZADANIE 8. Wiadomo, że $P\left(B'\right) = \frac{1}{2}$, $P\left(A \cup B\right) = \frac{2}{3}$ oraz $P\left(A' \cup B'\right) = \frac{5}{6}$. Obliczyć $P\left(A\right)$, $P\left(B\right)$ i $P\left(B \setminus A\right)$.

Rozwiązanie. Korzystamy z prawa de Morgana rachunku zbiorów (zob. tekst **RP1**):

$$A' \cup B' = \left(A \cap B\right)',$$

a stąd i z twierdzenia **1**, pkt.(b) z tekstu **RP2** otrzymujemy równości:

$$P\left(A' \cup B'\right) = P\left[\left(A \cap B\right)'\right] = 1 - P\left(A \cap B\right),$$

czyli

$$\frac{5}{6} = 1 - P\left(A \cap B\right).$$

Stąd $P\left(A \cap B\right) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

Korzystamy z twierdzenia **1**, pkt.(b) z tekstu **RP2** w celu obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia B :

$$P\left(B\right) = 1 - P\left(B'\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

i z danych w zadaniu otrzymujemy:

$$\frac{2}{3} = P(A) + \frac{1}{2} - \frac{1}{6},$$

a stąd

$$P(A) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Zdarzenie B jest sumą dwóch rozłącznych zdarzeń - są to zdarzenia $B \setminus A$ oraz $A \cap B$:

$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B), \tag{1}$$

$$(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset.$$

Dlatego też

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B),$$

czyli

$$\frac{1}{2} = P(B \setminus A) + \frac{1}{6},$$

więc $P(B \setminus A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ i $P(B \setminus A) = \frac{1}{3}$.

ZADANIE 9. Wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$. Czy zdarzenia A i B mogą się wykluczać?

Rozwiązanie. Gdyby te zdarzenia wykluczały się (zatem byłoby: $P(A \cap B) = 0$), to mielibyśmy równość wynikającą ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}.$$

Jest to niemożliwe, bo prawdopodobieństwo każdego zdarzenia nie przekracza 1.

Odpowiedź: Zdarzenia A i B nie mogą się wykluczać.

ZADANIE 10. Wiadomo, że $P(A) = 0,75$, $P(B) = 0,5$. Czy może się zdarzyć, że $P(A \cap B) < 0,4$?

Rozwiązanie. Rozważmy następujący przykład. Niech

$$\Omega = \{1, 2, 3, ..., 19, 20\},$$

$$A = \{1, 2, 3, ..., 14, 15\}, \qquad B = \{11, 12, 13, ..., 19, 20\}.$$

Wtedy

$$A \cap B = \{11, 12, 13, 14, 15\}$$

i mamy:

$$P(A) = 0,75, \qquad P(B) = 0,5, \qquad P(A \cap B) = 0,25,$$

więc $P(A \cap B) < 0,4$.

Odpowiedź: Opisana w zadaniu sytuacja może się zdarzyć.

ZADANIE 11. Udowodnić, że jeżeli $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym i zachodzi równość: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, to albo $P(A) = 1$, albo $P(B) = 1$.

Rozwiązanie. Wiemy, że $P(A \cup B) = 1$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń otrzymujemy kolejno równości:

$$1 = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$1 = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B),$$

$$1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = 0,$$

$$[1 - P(A)] \cdot [1 - P(B)] = 0,$$

$$1 - P(A) = 0 \qquad lub \qquad 1 - P(B) = 0,$$

czyli $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

ZADANIE 12. Udowodnić, że jeżeli $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym i $P(A \cap B) > \frac{1}{2}$, to $P(A) + P(B) > \frac{3}{2}$.

Rozwiązanie. Wiemy, że $P(A \cup B) = 1$. Ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń i z zamieszczonych danych otrzymujemy kolejno:

$$1 = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 1,$$

$$P(A) + P(B) - 1 > \frac{1}{2},$$

$$P(A) + P(B) > \frac{3}{2}.$$

To należało udowodnić.

ZADANIE 13. Obliczyć prawdopodobieństwo $P(B)$, jeżeli wiadomo, że $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A) = 3P(A \cap B)$ i $P(A) > 0$.

Rozwiązanie. Skoro $P(A) = 3P(A \cap B)$, to $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot P(A)$ i mamy kolejno:

$$\frac{1}{3} \cdot P(A) = P(A) \cdot P(B),$$

$$P(A) \cdot \left[P(B) - \frac{1}{3}\right] = 0,$$

więc skoro $P(A) > 0$, to $P(B) - \frac{1}{3} = 0$, czyli $P(B) = \frac{1}{3}$.

Odpowiedź: $P(B) = \frac{1}{3}$.

RP Zadania 2 - prawdopodobieństwo klasyczne

ZADANIE 1. Gra polega na rzucie monetą i kostką. Wygrywa się przy równoczesnym wyrzuceniu reszki i liczby większej od 2. Obliczyć prawdopodobieństwo wygranej.

ZADANIE 2. Gra polega na wylosowaniu jednej spośród trzech kul: białej, czerwonej i niebieskiej oraz rzucie kostką. Wygrywa się przy równoczesnym wyciągnięciu kuli czerwonej i wyrzuceniu czwórki. Obliczyć prawdopodobieństwo przegranej

ZADANIE 3. Liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ ustawiamy w sposób losowy w ciąg. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczby $1, 2$ i 3 znajdą się obok siebie w kolejności wzrastania?

ZADANIE 4. Liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ ustawiamy w sposób losowy w ciąg. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczby $1, 2$ i 3 znajdą się obok siebie (w dowolnej kolejności)?

ZADANIE 5. Ze zbioru liter $\{A, M, S, Y, Z\}$ losujemy kolejno 5 liter tworząc z nich (w kolejności, w jakiej zostały wylosowane) pięcioliterowy wyraz. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w ten sposób wyrazu $MYSZA$?

*(**Uwaga**: To oczywiście żart, nie należy mówić "mysza", ale nie o to tu chodzi).*

ZADANIE 6. Ze zbioru liter $\{E, K, K, O, T\}$ losujemy kolejno 5 liter tworząc z nich (w kolejności, w jakiej zostały wylosowane) pięcioliterowy wyraz. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w ten sposób wyrazu $KOTEK$?

ZADANIE 7. Ze zbioru $\{1, 2, ..., 9\}$ wybieramy losowo, bez zwrotu, dwie liczby x i y - najpierw x, potem y. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że $y < x$.

ZADANIE 8.

(a) Ze zbioru $\{1, 2, ..., 9\}$ wybieramy losowo, ze zwracaniem, kolejno dwie liczby x i y tworząc z nich liczbę dwucyfrową, w której x jest cyfrą dziesiątek, zaś y jest cyfrą jedności. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że otrzymana w ten sposób liczba jest większa od 42.

(b) Ze zbioru $\{1, 2, ..., 9\}$ wybieramy losowo, bez zwrotu, kolejno dwie liczby x i y tworząc z nich liczbę dwucyfrową, w której x jest cyfrą dziesiątek, zaś y jest cyfrą jedności. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że otrzymana w ten sposób liczba jest większa od 42.

ZADANIE 9. Rzucamy 8 kostek sześciennych do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek będzie równa 9.

ZADANIE 10. Rzucamy trzema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia na wszystkich kostkach

(a) jednakowej liczby oczek,

(b) różnej liczby oczek na każdej kostce.

ZADANIE 11. Z sześciu odcinków o długościach $1, 3, 5, 6, 7, 9$ wybieramy losowo trzy odcinki. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że z wybranych odcinków można zbudować trójkąt.

ZADANIE 12. Z talii 52 kart wyjmujemy losowo jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania asa lub karty pikowej?

ZADANIE 13. Z talii 52 kart losujemy 5 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród nich znajdzie się dokładnie jeden as i dokładnie dwie karty pikowe?

ZADANIE 14. Pięć kul rozmieszczono w dwóch szufladach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadna z szuflad nie jest pusta?

ZADANIE 15. Trzy kule wrzucamy do trzech szuflad. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w każdej szufladzie będzie co najwyżej jedna kula?

ZADANIE 16. Urna zawiera 3 kule białe i 4 czarne. Losujemy bez zwracania 2 kule. Znaleźć prawdopodobieństwo zdarzenia, że jedna z tych kul będzie biała a druga czarna.

ZADANIE 17. W urnie są 3 kule białe i 5 czarnych. Wybieramy w sposób losowy cztery kule. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród nich będą dokładnie dwie białe kule?

RP Zadania 2 - prawdopodobieństwo klasyczne. Rozwiązania

ZADANIE 1. Gra polega na rzucie monetą i kostką. Wygrywa się przy równoczesnym wyrzuceniu reszki i liczby większej od 2. Obliczyć prawdopodobieństwo wygranej.

Rozwiązanie. To żaden problem wypisać tu przestrzeń zdarzeń elementarnych, tworzy ją 12 par (x, y), gdzie $x \in \{O, R\}$, $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\Omega = \{(O, 1), (O, 2), ... (O, 6), (R, 1), (R, 2), ..., (R, 6)\}.$$

Jeżeli A jest zdarzeniem, o którym mowa w zadaniu, to

$$A = \{(R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6)\}.$$

Jak widać, są cztery zdarzenia elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia A i mamy:

$$|A| = 4, \quad |\Omega| = 12,$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

(zob. tekst **RP4**).

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wygranej równe jest $\frac{1}{3}$.

ZADANIE 2. Gra polega na wylosowaniu jednej spośród trzech kul: białej, czerwonej i niebieskiej oraz rzucie kostką. Wygrywa się przy równoczesnym wyciągnięciu kuli czerwonej i wyrzuceniu czwórki. Obliczyć prawdopodobieństwo przegranej.

Rozwiązanie. Trochę podobnie jak w poprzednim zadaniu przestrzeń zdarzeń elementarnych tworzy 18 par (x, y), gdzie $x \in \{B, C, N\}$, $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\Omega = \{(B, 1), ... (B, 6), (C, 1), ..., (C, 6), (N, 1), ..., (N, 6)\}$$

(B oznacza białą kulę, C - czerwoną, zaś N - niebieską).

Niech A oznacza wygraną. Wtedy mamy:

$$A = \{(C, 4)\},$$

więc

$$P(A) = \frac{1}{18}.$$

Przegrana jest, rzecz jasna, zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A, czyli jest to zdarzenie A', a wiemy (patrz tekst **RP2**, twierdzenie **1**), że

$$P(A') = 1 - P(A),$$

więc w naszym przypadku

$$P(A') = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo przegranej równe jest $\frac{17}{18}$.

ZADANIE 3. Liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ ustawiamy w sposób losowy w ciąg. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczby $1, 2$ i 3 znajdą się obok siebie w kolejności wzrastania?

Rozwiązanie. Mamy tu oczywiście do czynienia z permutacjami - elementy zbioru $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ (wszystkie) można ustawić w ciąg na

$$P_9 = 9!$$

sposobów, tak więc

$$|\Omega| = 9!$$

(zob. tekst **RP3**).

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że liczby $1, 2, 3$ sąsiadują ze sobą w podanej kolejności. Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zajściu zdarzenia A są więc:

(1) Wszystkie permutacje postaci

$$(1, 2, 3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9),$$

a ich liczba wynosi $P_6 = 6!$, gdyż 6-wyrazowy ciąg $(x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ - to po prostu permutacja zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(2) Wszystkie permutacje postaci

$$(x_1, 1, 2, 3, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9),$$

a ich liczba też wynosi $P_6 = 6!$, gdyż 6-wyrazowy ciąg $(x_1, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ - to po prostu permutacja zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(3) Wszystkie permutacje postaci

$$(x_1, x_2, 1, 2, 3, x_6, x_7, x_8, x_9),$$

a ich liczba też wynosi $P_6 = 6!$, gdyż 6-wyrazowy ciąg $(x_1, x_2, x_6, x_7, x_8, x_9)$ - to po prostu permutacja zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(4) Wszystkie permutacje postaci

$$(x_1, x_2, x_3, 1, 2, 3, x_7, x_8, x_9),$$

a ich liczba też wynosi $P_6 = 6!$, gdyż 6-wyrazowy ciąg $(x_1, x_2, x_3, x_7, x_8, x_9)$ - to po prostu permutacja zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(5) Wszystkie permutacje postaci

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, 1, 2, 3, x_8, x_9),$$

a ich liczba też wynosi $P_6 = 6!$, gdyż 6-wyrazowy ciąg $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_8, x_9)$ - to po prostu permutacja zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(6) Wszystkie permutacje postaci

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 1, 2, 3, x_9),$$

a ich liczba też wynosi $P_6 = 6!$, gdyż 6-wyrazowy ciąg $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_9)$ - to po prostu permutacja zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(7) Wszystkie permutacje postaci

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, 1, 2, 3),$$

a ich liczba też wynosi $P_6 = 6!$, gdyż 6-wyrazowy ciąg $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ - to po prostu permutacja zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Uff.

Mamy więc 7 parami rozłącznych grup zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A, w każdej jest 6! zdarzeń elementarnych, więc

$$|A| = 7 \cdot 6! = 7!$$

i dlatego

$$P(A) = \frac{7!}{9!} = \frac{1}{8 \cdot 9} = \frac{1}{72}.$$

(Inny sposób policzenia zdarzeń elementarnych należących do zbioru A jest następujący. Liczby: $1, 2, 3$ wypisujemy obok siebie w kolejności wzrastania na jednej kartce, a każdą spośród liczb 4, 5, 6, 7, 8, 9 - na oddzielnych kartkach. Teraz ustawiamy kartki w ciąg, a ponieważ kartek jest 7, możemy to uczynić na $P_7 = 7!$ sposobów, tak więc $|A| = 7!$ i jest to ten sam wynik, do którego doszliśmy poprzednio innym sposobem).

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{1}{72}$.

ZADANIE 4. Liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ ustawiamy w sposób losowy w ciąg. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczby $1, 2$ i 3 znajdą się obok siebie (w dowolnej kolejności)?

Rozwiązanie. Tak jak w poprzednim zadaniu, mamy tu do czynienia z permutacjami zbioru 9-elementowego, zatem

$$|\Omega| = 9!.$$

Niech B oznacza zdarzenie, o którym mowa w naszym zadaniu. W porównaniu ze zdarzeniem A z zadania **3** zbiór B jest liczniejszy. Weźmy bowiem pod uwagę dowolną permutację należącą do zbioru A; niech np. będzie to permutacja postaci

$$(x_1, x_2, 1, 2, 3, x_6, x_7, x_8, x_9)\,,$$

gdzie ciąg $(x_1, x_2, x_6, x_7, x_8, x_9)$ jest pewną permutacją zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Permutacja powyższa należy do zbioru B, ale wraz z nią należą też do zbioru B wszystkie permutacje otrzymane z niej przez przestawienie liczb $1, 2, 3$ na $P_3 = 3! = 6$ sposobów, czyli do zbioru B należą permutacje (łącznie z wyjściową):

$$\begin{gathered}(x_1, x_2, 1, 2, 3, x_6, x_7, x_8, x_9)\,,\\ (x_1, x_2, 1, 3, 2, x_6, x_7, x_8, x_9)\,,\\ (x_1, x_2, 2, 1, 3, x_6, x_7, x_8, x_9)\,,\\ (x_1, x_2, 2, 3, 1, x_6, x_7, x_8, x_9)\,,\\ (x_1, x_2, 3, 1, 2, x_6, x_7, x_8, x_9)\,,\\ (x_1, x_2, 3, 2, 1, x_6, x_7, x_8, x_9)\,.\end{gathered}$$

Liczba elementów w zbiorze B jest więc 6 razy większa od liczby elementów zbioru A, czyli

$$|B| = 6 \cdot |A| = 6 \cdot 7!$$

i dlatego

$$P\,(B) = \frac{6 \cdot 7!}{9!} = \frac{6}{8 \cdot 9} = \frac{1}{12}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{1}{12}$.

ZADANIE 5. Ze zbioru liter $\{A, M, S, Y, Z\}$ losujemy kolejno 5 liter tworząc z nich (w kolejności, w jakiej zostały wylosowane) pięcioliterowy wyraz. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w ten sposób wyrazu $MYSZA$?

*(**Uwaga**: To oczywiście żart, nie należy mówić "mysza", ale nie o to tu chodzi).*

Rozwiązanie. Chodzi oczywiście o permutacje zbioru 5-elementowego, więc

$$|\Omega| = P_5 = 5!.$$

Jeżeli A oznacza zdarzenie, o które chodzi w zadaniu, to tylko jedno zdarzenie elementarne sprzyja jego zajściu:

$$A = \{(M, Y, S, Z, A)\},$$

tak więc

$$P(A) = \frac{1}{5!}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{1}{5!}$.

ZADANIE 6. Ze zbioru liter $\{E, K, K, O, T\}$ losujemy kolejno 5 liter tworząc z nich (w kolejności, w jakiej zostały wylosowane) pięcioliterowy wyraz. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w ten sposób wyrazu $KOTEK$?

Rozwiązanie. W porównaniu z poprzednim zadaniem (zadanie **5**) konieczna jest tu pewna modyfikacja.

W zbiorze liter dwukrotnie powtarza się litera K. Gdyby te litery były rozróżnialne, np. gdyby miały indeksy, to mielibyśmy do czynienia ze zbiorem $\{E, K_1, K_2, O, T\}$ - jak w poprzednim zadaniu. Teraz możliwe są dwie interpretacje (obie poprawne).

Interpretacja I. Jak w zadaniu poprzednim, przestrzeń Ω jest zbiorem wszystkich permutacji zbioru 5-elementowego, tak więc

$$|\Omega| = P_5 = 5!.$$

Ale "kotki" są teraz **dwa**:

$$A = \{(K_1, O, T, E, K_2), (K_2, O, T, E, K_1)\},$$

tak więc

$$P(A) = \frac{2}{5!}.$$

Interpretacja II. Zmodyfikujemy przestrzeń zdarzeń elementarnych, a nową przestrzeń oznaczymy symbolem $\overline{\Omega}$. Dwie permutacje należące do poprzednio rozważanej przestrzeni Ω, w których litery E, O, T zajmują te same miejsca w ciągu, a jedynie litery K_1 i K_2 są przestawione, nazwiemy równoważnymi. (Mogą to być np. permutacje: (E, K_1, O, T, K_2) i (E, K_2, O, T, K_1)). Takie permutacje wyznaczają ten sam wyraz, ponieważ litery K_1 oraz K_2 w rzeczywistości nie są rozróżnialne. Skoro tak, to przestrzeń $\overline{\Omega}$ **różnych** wyrazów utworzonych ze zbioru $\{E, K, K, O, T\}$ jest dwukrotnie mniej liczna w porównaniu z przestrzenią Ω :

$$|\overline{\Omega}| = \frac{|\Omega|}{2} = \frac{5!}{2}.$$

Zdarzeniu $\overline{A}$, o które chodzi w zadaniu, sprzyja teraz tylko jedno zdarzenie elementarne:

$$\overline{A} = \{(K, O, T, E, K)\},$$

tak więc

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{1}{\frac{5!}{2}} = \frac{2}{5!}.$$

Otrzymaliśmy dokładnie ten sam wynik, co poprzednio.

Jest tak, ponieważ obydwie interpretacje, jak napisałem poprzednio, są poprawne.

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{2}{5!}$.

ZADANIE 7. Ze zbioru $\{1, 2, ..., 9\}$ wybieramy losowo, bez zwrotu, dwie liczby x i y - najpierw x, potem y. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że $y < x$.

Rozwiązanie. Jak widać, kolejność, w jakiej losujemy liczby, jest istotna, bo to druga z wylosowanych liczb ma być mniejsza od pierwszej. Potraktujemy więc to jako zadanie "na wariacje bez powtórzeń" (bez powtórzeń, bo losujemy bez zwracania). Wobec tego (zob. tekst **RP3**)

$$|\Omega| = V_2^9 = \frac{9!}{(9-2)!} = 9 \cdot 8 = 72.$$

Jeżeli A jest zdarzeniem, o którym mowa w zadaniu, to

$$A = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), ..., (9,1), ..., (9,8)\}.$$

Policzenie, ile jest zdarzeń elementarnych w tym zbiorze, nie jest trudne. Jest jedna para postaci: $(2, y)$, gdzie $y < 2$, dwie pary postaci: $(3, y)$, gdzie $y < 3$, trzy pary postaci: $(4, y)$, gdzie $y < 4$,i tak dalej. Zatem

$$|A| = 1 + 2 + 3 + ... + 8 = 36$$

i dlatego

$$P(A) = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{1}{2}$.

ZADANIE 8.

(a) Ze zbioru $\{1, 2, ..., 9\}$ wybieramy losowo, ze zwracaniem, kolejno dwie liczby x i y tworząc z nich liczbę dwucyfrową, w której x jest cyfrą dziesiątek, zaś y jest cyfrą jedności. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że otrzymana w ten sposób liczba jest większa od 42.

(b) Ze zbioru $\{1, 2, ..., 9\}$ wybieramy losowo, bez zwrotu, kolejno dwie liczby x i y tworząc z nich liczbę dwucyfrową, w której x jest cyfrą dziesiątek, zaś y jest cyfrą jedności. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że otrzymana w ten sposób liczba jest większa od 42.

Rozwiązanie.

(a) Kolejność losowania liczb jest tutaj istotna (bo co cyfra dziesiątek, to nie cyfra jedności), więc zastosujemy wariacje z powtórzeniami (losowanie jest ze zwrotem). W naszym przypadku będą to wariacje dwuelementowe ze zbioru 9-elementowego, zatem

$$|\Omega| = \overline{V}_2^9 = 9^2 = 81$$

(zob. tekst **RP3**)

Niech A oznacza zdarzenie, o którym mowa w zadaniu. Wtedy

$$A = \{(x, y) : (xy)_{10} > 42\}.$$

Policzenie par należących do zbioru A nie jest trudne. Jeżeli $x = 4$, to z uwagi na warunek $(xy)_{10} > 42$ cyfra y musi być równa co najmniej 3. W zbiorze $\{1, 2, ..., 9\}$ jest siedem liczb większych bądź równych 3 i są to liczby: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Zatem 7 par postaci $(4, y)$ należy do zbioru A.

Jeżeli $x \geq 5$, to liczba $(xy)_{10}$ jest większa od 42 dla każdego $y \in \{1, 2, ..., 9\}$, tak więc przy każdym ustalonym x ze zbioru: $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ mamy 9 par postaci (x, y) należących do zbioru A. Podsumowując,

$$|A| = 7 + 5 \cdot 9 = 52$$

i dlatego

$$P(A) = \frac{52}{81}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{52}{81}$.

(b) Kolejność losowania liczb dalej jest istotna, lecz zastosujemy wariacje bez powtórzeń (losowanie jest bez zwrotu). W naszym przypadku będą to wariacje dwuelementowe ze zbioru 9-elementowego, zatem

$$|\Omega| = V_2^9 = \frac{9!}{(9-2)!} = 9 \cdot 8 = 72$$

(zob. tekst **RP3**)

Niech B oznacza zdarzenie, o którym mowa w zadaniu. Wtedy

$$B = \{(x, y) : (xy)_{10} > 42 \ i \ x \neq y\} .$$

Policzenie par należących do zbioru B też nie jest trudne. Jeżeli $x = 4$, to z uwagi na warunek $(xy)_{10} > 42$ cyfra y musi być równa co najmniej 3, lecz nie może być równa 4. W zbiorze $\{1, 2, ..., 9\} \setminus \{4\}$ jest sześć liczb większych bądź równych 3 i są to liczby: 3, 5, 6, 7, 8, 9. Zatem 6 par postaci $(4, y)$ należy do zbioru A.

Jeżeli $x \geq 5$, to liczba $(xy)_{10}$ jest większa od 42 dla każdego $y \in \{1, 2, ..., 9\} \setminus \{x\}$, tak więc przy każdym ustalonym x ze zbioru: $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ mamy 8 par postaci (x, y) należących do zbioru A. Podsumowując,

$$|A| = 6 + 5 \cdot 8 = 46$$

i dlatego

$$P(A) = \frac{46}{81}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{46}{81}$.

ZADANIE 9. Rzucamy 8 kostek sześciennych do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek będzie równa 9.

Rozwiązanie. Jest to typowe zadanie na wariacje z powtórzeniami (liczby wyrzucanych oczek na kostkach mogą się powtarzać). Ponieważ rzucamy ośmioma kostkami, będą to wariacje 8-wyrazowe ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, więc

$$|\Omega| = \overline{V}_8^6 = 6^8.$$

Elementami przestrzeni Ω są ciągi postaci

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) ,$$

gdzie $x_k \in \{1,2,3,4,5,6\}$ dla $k \in \{1,...,8\}$. Jeżeli A oznacza zdarzenie, o które chodzi w zadaniu, to sprzyjającymi mu zdarzeniami elementarnymi będą takie ciągi, dla których

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 9.$$

Łatwo można się przekonać, że jest to możliwe tylko wtedy, gdy dokładnie jedna spośród liczb x_k jest równa 2, a pozostałe są równe 1. Liczba 2 może być dowolnym spośród ośmiu wyrazów ciągu, więc mamy 8 ciągów tego typu, tak że

$$|A| = 8$$

i dlatego

$$P(A) = \frac{8}{6^8}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{8}{6^8}$.

ZADANIE 10. Rzucamy trzema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia na wszystkich kostkach
(a) jednakowej liczby oczek,
(b) różnej liczby oczek na każdej kostce.

Rozwiązanie. Jest to typowe zadanie na wariacje z powtórzeniami (liczby wyrzucanych oczek na kostkach mogą się powtarzać). Ponieważ rzucamy trzema kostkami, będą to wariacje 3-wyrazowe ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$, więc

$$|\Omega| = \overline{V}_3^6 = 6^3.$$

Elementami przestrzeni Ω są ciągi postaci (x_1, x_2, x_3),gdzie $x_k \in \{1,2,3,4,5,6\}$ dla $k \in \{1,2,3\}$.

(a) Jeżeli A oznacza zdarzenie, o które chodzi w zadaniu, to

$$A = \{(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (4,4,4), (5,5,5), (6,6,6)\}$$

i dlatego

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{1}{36}$.

(b) Niech B oznacza zdarzenie, o które chodzi w zadaniu. Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zajściu zdarzenia B są teraz wszystkie takie ciągi (x_1, x_2, x_3), które są różnowartościowe. Ale każdy taki ciąg - to po prostu trójwyrazowa wariacja bez powtórzeń ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$, więc

$$|B| = V_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

i dlatego

$$P(A) = \frac{120}{6^3} = \frac{5}{9}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{5}{9}$.

ZADANIE 11. Z sześciu odcinków o długościach $1,3,5,6,7,9$ wybieramy losowo trzy odcinki. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że z wybranych odcinków można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie. Widać, że kolejność, w jakiej wybierane są odcinki, nie ma tu znaczenia - albo z wybranych odcinków da się zbudować trójkąt, albo się nie da. Zatem jest to zadanie "na kombinacje".W naszym przypadku będą to kombinacje trójelementowe ze zbioru 6-elementowego, czyli 3-elementowe podzbiory $\{x,y,z\}$ zbioru $\{1,3,5,6,7,9\}$, tak więc

$$|\Omega| = C_3^6 = \binom{6}{3} = 20.$$

(Zob. tekst **RP3**).

Jeżeli A oznacza zdarzenie opisane w zadaniu, to do zbioru A należą tylko takie kombinacje $\{x,y,z\}$, które spełniają warunki:

$$x+y>z, \quad x+z>y, \quad y+z>x. \tag{*}$$

Można by było wypisać wszystkie 20 kombinacji i przetestować każdą z nich, ale prościej jest rozumować tak oto. Nierówności (*) nie spełniają, co widać, wszystkie kombinacje postaci $\{1,y,z\}$. Ile ich mamy? Tyle, ile jest wszystkich podzbiorów dwuelementowych $\{y,z\}$ zbioru $\{3,5,6,7,9\}$, czyli

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = 10.$$

Oprócz nich warunków (*) nie spełniają jeszcze kombinacje $\{3,5,9\}$ i $\{3,6,9\}$, bo $3+5<9$ i $3+6=9$.

Zatem 12 zdarzeń elementarnych nie należy do zbioru A, a że wszystkich jest 20, więc

$$|A| = 20 - 12 = 8$$

i dlatego

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{2}{5}$.

ZADANIE 12. Z talii 52 kart wyjmujemy losowo jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania asa lub karty pikowej?

Rozwiązanie. Oczywiście $|\Omega| = 52$ (w talii mamy 52 karty, a losujemy jedną). Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu asa, zaś B - karty pikowej. Wtedy zdarzeniem, którego prawdopodobieństwo mamy wyznaczyć, jest $A \cup B$. Mamy: $|A| = 4$ (w talii są cztery asy) i $|B| = 13$ (w talii mamy 13 pików). Ponadto $|A| = 1$, bo $A = \{A\spadesuit\}$. Więc

$$P(A) = \frac{4}{52}, \qquad P(B) = \frac{13}{52}, \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{52}.$$

Skorzystamy ze wzoru (patrz tekst **RP2**, twierdzenie **1**):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Mamy:

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{4}{13}$.

ZADANIE 13. Z talii 52 kart losujemy 5 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród nich znajdzie się dokładnie jeden as i dokładnie dwie karty pikowe?

Rozwiązanie. Kolejność, w jakiej losowane są karty nie ma tu znaczenia, jest to wiec typowe zadanie dotyczące kombinacji - w tym wypadku kombinacji 5-elementowych ze zbioru 52-elementowego. Więc

$$|\Omega| = C_5^{52} = \binom{52}{5}.$$

Niech A będzie zdarzeniem, którego prawdopodobieństwo wyznaczamy. Kombinacje sprzyjające zajściu tego zdarzenia mogą być dwóch rodzajów:

(1) **Kombinacje I rodzaju**. Są to układy 5 kart, wśród których znajduje się dokładnie jeden as kierowy, karowy lub treflowy (nie pikowy!) oraz dokładnie dwie karty pikowe, z których żadna nie jest asem. Żądanego asa wybieramy zatem ze zbioru

$\{A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit\}$ na $\binom{3}{1}$ sposobów (kombinacje jednoelementowe ze zbioru trójelementowego). Dolosowujemy do wybranego asa 2 karty pikowe na $\binom{12}{2}$ sposobów (bowiem wybieramy dwie karty pikowe ze zbioru 12 pików nie będących asami). Na koniec uzupełniamy skład piątki kart przez dołączenie dwóch kart wybranych ze zbioru tych kart, które nie są ani asami, ani pikami, czyli ze zbioru 36 pozostałych kart. (Odrzucamy 13 pików i 3 nie-pikowe asy). To możemy zrobić na $\binom{36}{2}$ sposobów. Łącznie więc liczba wszystkich kombinacji I rodzaju jest równa

$$\binom{3}{1}\binom{12}{2}\binom{36}{2}.$$

(2) **Kombinacje II rodzaju.** Są to układy 5 kart, wśród których znajduje się as pikowy i jedna karta pikowa nie będąca asem oraz dowolne trzy karty, z których żadna nie jest pikiem ani asem. Asa pikowego możemy oczywiście wybrać na jeden sposób, drugiego pika - na $\binom{12}{1}$ sposobów, a pozostałe trzy karty - na $\binom{36}{3}$ sposoby. Łącznie więc liczba wszystkich kombinacji II rodzaju jest równa

$$\binom{12}{1}\binom{36}{3}.$$

Ponieważ zbiory kombinacji I i II rodzaju są rozłączne, więc

$$|A| = \binom{3}{1}\binom{12}{2}\binom{36}{2} + \binom{12}{1}\binom{36}{3}$$

i dlatego

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{12}{2}\binom{36}{2} + \binom{12}{1}\binom{36}{3}}{\binom{52}{5}}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\dfrac{\binom{3}{1}\binom{12}{2}\binom{36}{2} + \binom{12}{1}\binom{36}{3}}{\binom{52}{5}}$.

ZADANIE 14. Pięć kul rozmieszczono w dwóch szufladach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadna z szuflad nie jest pusta?

Rozwiązanie. Zagadnienia dotyczące rozmieszczania kul czy też innych obiektów w szufladach lub innych pojemnikach są typowymi zadaniami dotyczącymi wariacji z powtórzeniami. Numerujemy kule liczbami od 1 do 5 oraz szuflady liczbami $1, 2$. Teraz każde rozmieszczenie kul opisuje ciąg $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, gdzie x_k jest numerem szuflady, w której została umieszczona k-ta kula. Tak więc $x_k \in \{1, 2\}$ dla

$k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Takie ciągi są po prostu wariacjami (z powtórzeniami) pięciowyrazowymi ze zbioru dwuelementowego, stąd

$$|\Omega| = \overline{V}_2^5 = 2^5 = 32.$$

Niech A oznacza rozważane zdarzenie. Zajmiemy się zdarzeniem A' do niego przeciwnym (tak będzie prościej). Zdarzenie A' polega na tym, że jedna spośród szuflad jest pusta, a to oznacza, że wszystkie kule są w drugiej szufladzie. Wobec tego

$$A' = \{(1, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2, 2)\}, \qquad |A'| = 2$$

i mamy

$$P(A') = \frac{2}{32} = \frac{1}{16.}$$

Wiemy (patrz tekst **RP2**, twierdzenie **1**), że

$$P(A) = 1 - P(A'),$$

więc w naszym przypadku

$$P(A) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{15}{16}$.

ZADANIE 15. Trzy kule wrzucamy do trzech szuflad. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w każdej szufladzie będzie co najwyżej jedna kula?

Rozwiązanie. Jak w zadaniu poprzednim (zadanie **14**) mamy tu:

$$|\Omega| = \overline{V}_3^3 = 3^3 = 27.$$

Niech A oznacza rozważane zdarzenie. Łatwo można zauważyć, że polega ono na tym, że każda kula jest w innej szufladzie. Zatem zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zajściu zdarzenia A są tylko takie wariacje (x_1, x_2, x_3), które są różnowartościowe - czyli wariacje bez powtórzeń. Wobec tego

$$|A| = V_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = 6$$

i dlatego

$$P(A) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{2}{9}$.

ZADANIE 16. Urna zawiera 3 kule białe i 4 czarne. Losujemy bez zwracania 2 kule. Znaleźć prawdopodobieństwo zdarzenia, że jedna z tych kul będzie biała a druga czarna.

Rozwiązanie. Zadanie dopuszcza dwie interpretacje, obie poprawne.

Interpretacja I (lepsza)**.** Kolejność, w jakiej losujemy kule, nie jest istotna, zatem mamy tu do czynienia z kombinacjami dwuelementowymi ze zbioru 7-elementowego (tyle mamy wszystkich kul). Wobec tego

$$|\Omega| = C_2^7 = \binom{7}{2} = 21.$$

Niech A oznacza rozważane zdarzenie. Łatwo można ustalić liczbę elementów zbioru A. Są to wszystkie układy dwóch kul, z których jedna jest biała, i tę kulę możemy wybrać na $\binom{3}{1}$ sposobów (kombinacje po 1 elemencie spośród trzech białych kul), zaś druga kula jest czarna i możemy ją dolosować na $\binom{4}{1}$ sposobów. Zatem

$$|A| = \binom{3}{1}\binom{4}{1} = 3 \cdot 4 = 12$$

i dlatego

$$P(A) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

Interpretacja II. Wprawdzie kolejność losowania kul nie jest tu istotna, możemy jednak chwilowo wprowadzić ją do rozważań. Ponumerujmy kule i niech b_1, b_2, b_3 oznaczają kule białe, zaś c_1, c_2, c_3, c_4 niech oznaczają kule czarne. Skoro tak, to przestrzeń Ω będzie teraz zbiorem wszystkich wariacji dwuwyrazowych bez powtórzeń (losowanie jest bez zwracania) postaci (x_1, x_2), gdzie

$$x_1 \neq x_2 \quad i \quad x_1, x_2 \in \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4.\}$$

Wobec tego

$$|\Omega| = V_2^7 = \frac{7!}{(7-2)!} = 42.$$

Niech A oznacza rozważane zdarzenie. Sprzyjają jego zajściu zdarzenia elementarne postaci (b_j, c_k) (najpierw wylosowana jest biała kula, a potem czarna) i takich jest $3 \cdot 4$, gdyż białą kulę wybieramy na 3 sposoby i niezależnie od tego czarną na 4 sposoby. Zajściu zdarzenia A sprzyjają także zdarzenia elementarne postaci (c_k, b_j) (najpierw wylosowana jest czarna kula, a potem biała) i takich jest $4 \cdot 3$, gdyż czarną kulę wybieramy na 4 sposoby i niezależnie od tego białą na 3 sposoby. Więc

$$|A| = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$$

i dlatego
$$P(A) = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{4}{7}$.

ZADANIE 17. W urnie są 3 kule białe i 5 czarnych. Wybieramy w sposób losowy cztery kule. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród nich będą dokładnie dwie białe kule?

Rozwiązanie. Zadanie dopuszcza dwie interpretacje, obie poprawne.

Interpretacja I (lepsza)**.** Kolejność, w jakiej losujemy kule, nie jest istotna, zatem mamy tu do czynienia z kombinacjami 4-elementowymi ze zbioru 8-elementowego (tyle mamy wszystkich kul). Wobec tego
$$|\Omega| = C_4^8 = \binom{8}{4} = 70.$$

Niech A oznacza rozważane zdarzenie. Łatwo można ustalić liczbę elementów zbioru A. Są to wszystkie układy czterech kul, z których dokładnie dwie są białe, i te kule możemy wybrać na $\binom{3}{2}$ sposobów (kombinacje po 2 kule spośród trzech białych kul), a dwie kule są czarne i możemy je dolosować na $\binom{5}{2}$ sposobów. Zatem
$$|A| = \binom{3}{2}\binom{5}{2} = 3 \cdot 10 = 30$$

i dlatego
$$P(A) = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}.$$

Interpretacja II. Wprawdzie kolejność losowania kul nie jest tu istotna, możemy jednak chwilowo wprowadzić ją do rozważań. Ponumerujmy kule i niech b_1, b_2, b_3 oznaczają kule białe, zaś c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 niech oznaczają kule czarne. Skoro tak, to przestrzeń Ω będzie teraz zbiorem wszystkich wariacji dwuwyrazowych bez powtórzeń (losowanie jest bez zwracania) postaci (x_1, x_2, x_3, x_4), gdzie
$$x_j \neq x_k \quad i \quad x_1, x_2, x_3 x_4 \in \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}.$$

Wobec tego
$$|\Omega| = V_4^8 = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680.$$

Niech A oznacza rozważane zdarzenie. Sprzyjają jego zajściu zdarzenia elementarne postaci (x_1, x_2, x_3, x_4), gdzie dokładnie dwa wyrazy ciągu należą do zbioru $\{b_1, b_2, b_3\}$ i dokładnie dwa należą do zbioru $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$. Najpierw ustalimy, na ile sposobów można wybrać te numery wyrazów ciągu, na których znajdują się białe kule (na pozostałych miejscach będą oczywiście kule czarne). To można uczynić na $\binom{4}{2} = 6$ sposobów. Gdy rozmieszczenie w ciągu białych i czarnych kul jest już określone, zauważmy, że pierwszą białą kulę można wybrać na 3 sposoby, zaś drugą na 2. Podobnie, pierwszą czarną kulę wybieramy na 5 sposobów, zaś drugą na 4 sposoby. Ostatecznie więc

$$|A| = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 720$$

i dlatego

$$P(A) = \frac{720}{1680} = \frac{3}{7}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{3}{7}$.

RP_Zadania 3 - prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo całkowite, niezależność zdarzeń, schemat Bernoulliego

ZADANIE 1. Rzucamy dwiema kostkami - białą i czarną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek na obu kostkach wyniesie 6, jeżeli wiadomo, że na białej kostce wypadło 5 oczek?

ZADANIE 2. Rzucamy trzy razy kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przynajmniej raz wypadnie piątka, jeżeli za każdym rzutem otrzymywane były różne liczby oczek.

ZADANIE 3. Zakłady Z_1, Z_2 i Z_3 dają odpowiednio 25%, 35% i 40% ogólnej produkcji pewnego produktu, przy czym wyroby zakładu Z_1 zawierają 5% braków, wyroby zakładu Z_2 - 3% braków, wyroby zakładu Z_3 - 2% braków. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany produkt pochodzący z tych zakładów jest dobry.

ZADANIE 4. Z urny zawierającej 13 kul białych i 10 kul czarnych losujemy jedną kulę (i zwracamy ją do urny), a następnie wyjmujemy z urny trzy kule tego samego koloru co wylosowana kula. Z pozostałych kul losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest to kula biała?

ZADANIE 5. Rzucamy kostką. Czy zdarzenia: "wypadła parzysta liczba oczek" oraz "wypadła liczba oczek podzielna przez 3" są niezależne?

ZADANIE 6. Rzucamy trzy razy monetą. Czy zdarzenia: "wypadło więcej orłów niż reszek" oraz "w pierwszym rzucie wypadł orzeł" są niezależne?

ZADANIE 7. Kwoka wysiaduje trzy jaja. Przyjmujemy (dla uproszczenia), że prawdopodobieństwo tego, że z konkretnego jaja wykluje się kurka, jest równe $\frac{1}{2}$ i takie samo jest prawdopdobieństwo tego, że z tego jaja wykluje się kogucik. Czy zdarzenia: "wykluje się co najwyżej jedna kurka" oraz "wyklują się zarówno kurki, jak i kogutki" są niezależne?

ZADANIE 8. Rzucamy 5 razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że szóstka wypadnie co najmniej czterokrotnie?

ZADANIE 9. W urnie znajduje się 6 kul białych i 4 czarne. Losujemy z urny 5 razy po 2 kule, zwracając je za każdym razem do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania pary kul różnych kolorów dokładnie dwa razy?

ZADANIE 10. Zdarzenia losowe A i B spełniają warunek: $P\left(A|B\right) = P\left(A|B'\right)$. Udowodnić, że zdarzenia A i B są niezależne. (A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A).

ZADANIE 11. Załóżmy, że zdarzenia A i B są takie, że $P\left(A\right) = \frac{1}{2}$ i $P\left(B\right) = \frac{2}{3}$. Czy zdarzenia te mogą być niezależne? Jeżeli tak, podać odpowiedni przykład.

RP_Zadania 3 - prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo całkowite, niezależność zdarzeń, schemat Bernoulliego. Rozwiązania

ZADANIE 1. Rzucamy dwiema kostkami - białą i czarną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek na obu kostkach wyniesie 6, jeżeli wiadomo, że na białej kostce wypadło 5 oczek?

Rozwiązanie. Zadanie dotyczy prawdopodobieństwa warunkowego (zob. tekst **RP5**). Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że suma wyrzuconych oczek na obu kostkach równa jest 6, zaś B niech będzie zdarzeniem polegającym na tym, że na białej kostce wypadło 5 oczek. Mamy obliczyć $P(A|B)$.

Rzut dwiema kostkami może dać 36 możliwych wyników, więc $|\Omega| = 36$. Zdarzenia elementarne będziemy zapisywać jako pary uporządkowane (x, y), przy czym umawiamy się, że x oznacza liczbę wyrzuconych oczek na kostce białej, zaś y - na kostce czarnej.

Przy tych oznaczeniach mamy:

$$A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\},$$

$$B = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\},$$

$$A \cap B = \{(5,1)\},$$

więc $|B| = 6$, $|A \cap B| = 1$ i

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

Zgodnie z definicją prawdopodobieństwa warunkowego (wzór (1) z tekstu **RP5**) mamy:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{6}$.

ZADANIE 2. Rzucamy trzy razy kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przynajmniej raz wypadnie piątka, jeżeli za każdym rzutem otrzymywane były różne liczby oczek.

Rozwiązanie. Zadanie też dotyczy prawdopodobieństwa warunkowego (zob. tekst **RP5**). Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że przynajmniej raz wypadnie piątka, zaś B niech będzie zdarzeniem polegającym na tym, że za każdym rzutem otrzymujemy różne liczby oczek. Mamy obliczyć $P(A|B)$.

Dla trzykrotnego rzutu kostką mamy: $|\Omega| = 6^3 = 216$. (Wariacje z powtórzeniami, zob. tekst **RP 3**). Zdarzenia elementarne możemy zapisywać jako ciągi trójwyrazowe (x, y, z), przy czym x, y, z oznaczają wyniki kolejnych rzutów. Przy tych oznaczeniach do zbioru $A \cap B$ będą należały następujące ciągi:

(1) Wszystkie ciągi postaci $(5, y, z)$, gdzie $y \neq z$ i $y, z \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (ciągi muszą być różnowartościowe, bo za każdym rzutem otrzymujemy różne liczby oczek). Możemy więc wybrać y na 5 sposobów i z, niezależnie, na 4 sposoby, co razem daje $5 \cdot 4 = 20$ takich ciągów.

(2) Wszystkie ciągi postaci $(x, 5, z)$, gdzie $x \neq z$ i $x, z \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Rozumując jak powyżej stwierdzamy łatwo, że jest również 20 takich ciągów.

(3) Wszystkie ciągi postaci $(x, y, 5)$, gdzie $x \neq y$ i $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Rozumując jak powyżej stwierdzamy łatwo, że jest również 20 takich ciągów.

Ponieważ opisane powyżej grupy ciągów są parami rozłączne, więc

$$|A \cap B| = 20 + 20 + 20 = 60, \qquad P(A \cap B) = \frac{60}{216} = \frac{5}{18}.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia B obliczymy łatwiej, bo do zbioru B należą wszystkie ciągi różnowartościowe, wystarczy więc skorzystać ze wzoru na wariacje bez powtórzeń (zob. tekst **RP3**). Mamy:

$$|B| = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120, \qquad P(B) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}.$$

Zgodnie z definicją prawdopodobieństwa warunkowego (wzór (1) z tekstu **RP5**) mamy:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{2}$.

ZADANIE 3. Zakłady Z_1, Z_2 i Z_3 dają odpowiednio 25%, 35% i 40% ogólnej produkcji pewnego produktu, przy czym wyroby zakładu Z_1 zawierają 5% braków, wyroby zakładu Z_2 - 3% braków, wyroby zakładu Z_3 - 2% braków. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany produkt pochodzący z tych zakładów jest dobry.

Rozwiązanie. Jest to typowe zadanie dotyczące prawdopodobieństwa całkowitego (zob. tekst **RP6**). Niech B_1 oznacza zdarzenie polegające na tym, że losowo wybrany produkt pochodzi z zakładu Z_1. Analogicznie, niech B_2 oznacza zdarzenie polegające na tym, że losowo wybrany produkt pochodzi z zakładu Z_2, zaś B_3 - że pochodzi on z zakładu Z_3. Bardzo łatwo można stwierdzić, że zdarzenia B_1, B_2 i B_3 stanowią zupełny układ zdarzeń. Z treści zadania wynika, że

$$P(B_1) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}, \qquad P(B_2) = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}, \qquad P(B_3) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}.$$

Niech A oznacza zdarzenie, że losowo wybrany produkt pochodzący z tych zakładów jest dobry. Ile wynosi prawdopodobieństwo tego, że wybrany w sposób losowy produkt pochodzący z zakładu Z_1 jest dobry, czyli prawdopodobieństwo **warunkowe** $P(A|B_1)$? Skoro wyroby zakładu Z_1 zawierają 5% braków, to prawdopodobieństwo tego, że będzie on wadliwy, równe jest $\frac{5}{100}$, zatem prawdopodobieństwo tego, że jest dobry, wynosi

$$P(A|B_1) = 1 - \frac{5}{100} = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}.$$

W analogiczny sposób stwierdzamy, że

$$P(A|B_2) = \frac{97}{100}, \qquad P(A|B_2) = \frac{49}{50}.$$

Wystarczy teraz zastosować wzór (1) z tekstu **RP6**:

$$P(A) = P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + P(A|B_3)\,P(B_3) =$$

$$= \frac{19}{20} \cdot \frac{1}{4} + \frac{97}{100} \cdot \frac{7}{20} + \frac{49}{50} \cdot \frac{2}{5} = \frac{969}{1000}.$$

Uwaga: Można sporządzić odpowiednie "drzewko" i przekonać się, że otrzymuje się ten sam rezultat.

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{969}{1000}$.

ZADANIE 4. Z urny zawierającej 13 kul białych i 10 kul czarnych losujemy jedną kulę (i zwracamy ją do urny), a następnie wyjmujemy z urny trzy kule tego samego koloru co wylosowana kula. Z pozostałych kul losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest to kula biała?

Rozwiązanie. Zadanie dotyczy prawdopodobieństwa całkowitego (zob. tekst **RP6**). Niech B_1 oznacza zdarzenie polegające na tym, że w pierwszym losowaniu wylosowaliśmy kulę białą, zaś B_2 niech oznacza zdarzenie polegające na tym, że w pierwszym losowaniu wylosowaliśmy kulę czarną. Łatwo można stwierdzić, że zdarzenia B_1 i B_2 stanowią zupełny układ zdarzeń. Z treści zadania wynika, że

$$P(B_1) = \frac{13}{23}, \qquad P(B_2) = \frac{10}{23}.$$

Niech A oznacza zdarzenie, że w drugim losowaniu otrzymamy kulę białą. Zdarzenie to może zajść przy dwóch warunkach, a są nimi właśnie zdarzenia B_1 i B_2. Ile wynosi prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A przy warunku B_1, czyli $P(A|B_1)$? Skoro zaszło zdarzenie B_1, to przed drugim losowaniem wyjęliśmy z urny trzy białe kule, tak więc zawiera ona 10 kul białych i 10 kul czarnych. Wobec tego

$$P(A|B_1) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

W podobny sposób stwierdzamy, że

$$P(A|B_2) = \frac{13}{20}.$$

Stosujemy teraz wzór (1) z tekstu **RP6**:

$$P(A) = P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{23} + \frac{13}{20} \cdot \frac{10}{23} = \frac{13}{23}.$$

Uwaga: Można sporządzić odpowiednie "drzewko" i przekonać się, że otrzymuje się ten sam rezultat.

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{13}{23}$.

ZADANIE 5. Rzucamy kostką. Czy zdarzenia: "wypadła parzysta liczba oczek" oraz "wypadła liczba oczek podzielna przez 3" są niezależne?

Rozwiązanie. Wprowadźmy oznaczenia dla odpowiednich zdarzeń:
A- Wypadła parzysta liczba oczek.
B - Wypadła liczba oczek podzielna przez 3.
Mamy: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$, $A \cap B = \{6\}$. Zatem

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{1}{3}, \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Sprawdzamy, czy zachodzi równość (1) z tekstu **RP7**:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Stwierdzamy, że

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3},$$

więc równość zachodzi.

Odpowiedź: Zdarzenia są niezależne.

ZADANIE 6. Rzucamy trzy razy monetą. Czy zdarzenia: "wypadło więcej orłów niż reszek" oraz "w pierwszym rzucie wypadł orzeł" są niezależne?

Rozwiązanie. Wprowadźmy oznaczenia dla odpowiednich zdarzeń:
A- Wypadło więcej orłów niż reszek.
B - W pierwszym rzucie wypadł orzeł.
Mamy: $|\Omega| = 2^3 = 8$, ponadto

$$A = \{(O,O,O), (O,O,R), (O,R,O), (R,O,O)\},$$

$$B = \{(O,O,O), (O,O,R), (O,R,O), (O,R,R)\},$$

$$A \cap B = \{(O,O,O), (O,O,R), (O,R,O)\},$$

więc

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}, \qquad P(A \cap B) = \frac{3}{8}.$$

Sprawdzamy, czy zachodzi równość (1) z tekstu **RP7**:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Stwierdzamy, że

$$\frac{3}{8} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

więc równość nie zachodzi.

Odpowiedź: Zdarzenia nie są niezależne (są więc zależne).

ZADANIE 7. Kwoka wysiaduje trzy jaja. Przyjmujemy (dla uproszczenia), że prawdopodobieństwo tego, że z konkretnego jaja wykluje się kurka, jest równe $\frac{1}{2}$ i takie samo jest prawdopdobieństwo tego, że z tego jaja wykluje się kogucik. Czy zdarzenia: "wykluje się co najwyżej jedna kurka" oraz "wyklują się zarówno kurki, jak i kogutki" są niezależne?

Rozwiązanie. Wprowadźmy oznaczenia dla odpowiednich zdarzeń:
A- Wykluje się co najwyżej jedna kurka.

B - Wyklują się zarówno kurki, jak i kogutki.

Z treści zadania wynika, że $|\Omega| = 2^3 = 8$. Niech "ku" oznacza kurkę, zaś "ko" - kogucika. Mamy więc:

$$A = \{(ko, ko, ko), (ko, ko, ku), (ko, ku, ko), (ku, ko, ko)\},$$

$$B = \{(ko, ko, ku), (ko, ku, ko), (ku, ko, ko), (ko, ku, ku), (ku, ko, ku), (ku, ku, ko)\},$$

$$A \cap B = (ko, ko, ku), (ko, ku, ko), (ku, ko, ko),$$

więc

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{3}{4}, \qquad P(A \cap B) = \frac{3}{8}.$$

Sprawdzamy, czy zachodzi równość (1) z tekstu **RP7**:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Stwierdzamy, że

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4},$$

więc równość zachodzi.

Odpowiedź: Zdarzenia są niezależne.

ZADANIE 8. Rzucamy 5 razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że szóstka wypadnie co najmniej czterokrotnie?

Rozwiązanie. Jest to typowe zadanie dotyczące schematu Bernoulliego (zob. tekst **RP8**). Pojedyncza próba - to rzut kostką, a za sukces przyjmujemy wyrzucenie szóstki. Przy oznaczeniach z tekstu **RP8** mamy więc: $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $n = 5$ (rzucamy pięć razy). Interesujące nas zdarzenie A polega na uzyskaniu w tej serii 4 lub 5 sukcesów ($k = 4$ lub $k = 5$), zatem jest sumą dwóch zdarzeń, z których pierwsze polega na uzyskaniu w serii dokładnie 4 sukcesów ($k = 4$), zaś drugie - dokładnie 5 sukcesów ($k = 5$). Zdarzenia te są oczywiście rozłączne, więc prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest sumą ich prawdopodobieństw. Zgodnie z twierdzeniem **1** z tekstu **RP8** mamy zatem:

$$P(A) = P(4;5) + P(5;5) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

$$= \frac{5 \cdot 5 + 1}{6^5} = \frac{13}{3888}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{13}{3888}$.

ZADANIE 9. W urnie znajduje się 6 kul białych i 4 czarne. Losujemy z urny 5 razy po 2 kule, zwracając je za każdym razem do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania pary kul różnych kolorów dokładnie dwa razy?

Rozwiązanie. Zastosujemy schemat Bernoulliego (zob. tekst **RP8**), gdzie $n = 5$ (losujemy pięć razy), a pojedyncza próba polega na losowaniu dwóch kul z urny. Za sukces przyjmujemy wylosowanie pary kul o różnych kolorach i w serii mają być dwa takie sukcesy ($k = 2$). Pozostaje wyznaczyć prawdopodobieństwo p sukcesu w pojedynczej próbie. Ponieważ kolejność, w jakiej losujemy kule, nie ma tu znaczenia, zastosujemy wzór na kombinacje (zob. tekst **RP3**). Dwie kule z urny zawierającej 10 kul możemy wylosować na

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

sposobów, więc $|\Omega| = 45$. Białą kulę możemy wylosować na 6 sposobów, a czarną możemy dolosować do niej na 4 sposoby, tak więc

$$p = \frac{6 \cdot 4}{45} = \frac{8}{15}.$$

Wobec tego $q = 1 - p = \frac{7}{15}$.

Stosujemy wzór z twierdzenia **1** z tekstu **RP8**:

$$P\left(2;5\right) = \binom{5}{2}\left(\frac{8}{15}\right)^2\left(\frac{7}{15}\right)^3 = \frac{43904}{151875}.$$

Odpowiedź: Szukane prawdopodobieństwo równe jest $\frac{43904}{151875}$.

Uwaga. Odpowiedź w formie: "Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\binom{5}{2}\left(\frac{8}{15}\right)^2\left(\frac{7}{15}\right)^3$" też jest dopuszczalna, oczywiście.

ZADANIE 10. Zdarzenia losowe A i B spełniają warunek: $P\left(A|B\right) = P\left(A|B'\right)$. Udowodnić, że zdarzenia A i B są niezależne. (A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A).

Rozwiązanie. Będziemy stosować różne wzory z tekstu **RP2**, nieźle byłoby wiec sobie przypomnieć, co tam jest.

Skoro mowa o prawdopodobieństwach warunkowych, to na pewno jest $P(B) > 0$ oraz $P(B') > 0$ (zob. tekst **RP5**).

Z założenia wiemy, że $P(A|B) = P(A|B')$, a to oznacza, że

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B')}{P(B')}. \tag{*}$$

Wiemy też, że

$$P(B') = 1 - P(B),$$

a ponadto wiemy, że $B \cup B' = \Omega$. Stąd wynika, że

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B') = (A \cap B) \cup (A \cap B').$$

Zdarzenia $A \cap B$ i $A \cap B'$ są rozłączne, więc

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

i dlatego

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B).$$

Wstawiamy to wszystko do wzoru (*) i mamy:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)},$$

a stąd kolejno mamy:

$$P(A \cap B) \cdot [1 - P(B)] = [P(A) - P(A \cap B)] \cdot P(B),$$

$$P(A \cap B) - P(A \cap B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B) - P(A \cap B) \cdot P(B),$$

czyli

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Zgodnie z definicją (zob. tekst **RP7**) oznacza to, że zdarzenia A i B są niezależne. A to właśnie należało udowodnić.

ZADANIE 11. Załóżmy, że zdarzenia A i B są takie, że $P(A) = \frac{1}{2}$ i $P(B) = \frac{2}{3}$. Czy zdarzenia te mogą być niezależne? Jeżeli tak, podać odpowiedni przykład.

Rozwiązanie. Dla niezależnych zdarzeń A i B, jak wiemy (zob. tekst **RP7**) zachodzi równość:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Gdyby nasze zdarzenia były niezależne, mielibyśmy więc:

$$P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Z drugiej strony wiemy, że $A \cap B \subset A$ i $A \cap B \subset B$. Powinny być więc spełnione nierówności:

$$P\left(A \cap B\right) \le P\left(A\right) \qquad i \qquad P\left(A \cap B\right) \le P\left(B\right).$$

Sprawdzamy, jak jest w naszym przypadku i stwierdzamy, że

$$\frac{1}{3} \le \frac{1}{2} \qquad i \qquad \frac{1}{3} \le \frac{2}{3},$$

więc nierówności zachodzą. Wygląda na to, że, owszem, zdarzenia A i B mogą być niezależne.

Na pewno będziemy jednak mogli to stwierdzić dopiero wtedy, gdy podamy konkretny przykład. A oto ten przykład. Wartości prawdopodobieństw zdarzeń sugerują, że przykład można podać nawet dla pojedynczego rzutu kostką. Rzweczywiście tak jest. Niech np.

$$A = \{1,2,3\}, \qquad B = \{1,2,5,6\}, \qquad A \cap B = \{1,2\}.$$

Wtedy mamy:

$$P\left(A\right) = \frac{1}{2}, \qquad P\left(B\right) = \frac{2}{3}, \qquad P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{3},$$

właśnie tak, jak miało być.

Odpowiedź: Zdarzenia mogą być niezależne.