# RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

klasa III 2019/20

Adam Stachura

# RP 1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych

### 1. Przestrzeń $\Omega$.

W rachunku prawdopodobieństwa zadanie często dotyczy przewidywania (właściwie określenia prawdopodobieństwa) wyniku "eksperymentu losowego", czyli zjawiska, które może się zrealizować na jeden ze sposobów (z określonego zbioru) Każdy taki konkretny sposób realizacji danego eksperymentu losowego to tak zwane "zdarzenie elementarne" - pojedynczy wynik, elementarny w tym sensie, że nie rozdzielamy go już na żadne "podwyniki". Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych dla danego eksperymentu losowego. Często oznacza się ją symbolem $\Omega$.

Przykładowo, pojedynczy rzut kostką do gry może dać jeden z sześciu możliwych wyników i każdy z nich można wygodnie opisać podając liczbę wyrzuconych "oczek". Tak więc przestrzeń zdarzeń $\Omega$ można tu traktować po prostu jako zbiór sześciu liczb: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Przy pojedynczym rzucie monetą przestrzeń zdarzeń jest zbiorem dwóch zdarzeń elementarnych, które można zakodować symbolami $O$ (orzeł) i $R$ (reszka). Tak więc $\Omega = \{O, R\}$.

Przy trzykrotnym rzucie monetą przestrzeń $\Omega$ można uważać za zbiór ciągów trójwyrazowych:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(O,O,O), (O,O,R), (O,R,O), (R,O,O), \\ &\quad (O,R,R), (R,O,R), (R,R,O), (R,R,R)\}. \end{aligned}$$

Pierwszy wyraz ciągu podaje, co wypadło za pierwszym rzutem, drugi - za drugim, trzeci wyraz ciągu określa, co wypadło przy trzecim rzucie.

Niech eksperyment polega na tym, że na parterze dziesięciopiętrowego domu znajdują się trzy osoby mające zamiar udania się w podróż windą, przy czym każda z nich może wysiąść na dowolnym spośród 10 pięter. Jak opisać tu przestrzeń zdarzeń elementarnych? Dobrze jest "w myśli" ponumerować te osoby (to znacznie ułatwia analizę). Teraz każdy sposób opuszczenia windy (zdarzenie elementarne) można zakodować po prostu jako ciąg trójwyrazowy postaci $(x_1, x_2, x_3,)$, gdzie $x_k$ oznacza numer piętra, na którym wysiadła $k$-ta osoba. Każda spośród liczb $x_1, x_2, x_3$ należy do zbioru liczb od 1 do 10 włącznie. Tak np. ciąg $(3, 7, 3)$ oznacza, że osoba pierwsza wysiadła na trzecim piętrze, osoba druga na siódmym, zaś trzecia - również na trzecim. Przestrzeń $\Omega$ składa się w tym eksperymencie z $10^3 = 1000$ zdarzeń elementarnych, bo tyle jest ciągów, o których mowa.

Tak to wygląda od strony zastosowań. Dla matematyka zaś przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ jest po prostu pewnym zbiorem niepustym, $\Omega \neq \emptyset$. Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie elementy tego zbioru, tak więc stwierdzenie, że $\omega$ jest zdarzeniem elementarnym oznacza, że $\omega \in \Omega$.

## 2. Zdarzenia i działania na nich.

Rozważamy przestrzeń $\Omega$ zdarzeń elementarnych dla danego eksperymentu losowego. **Zdarzeniem** (już nie elementarnym, po prostu zdarzeniem) nazywamy dowolny podzbiór tej przestrzeni, czyli zbiór $A \subset \Omega$. (Nie wykluczamy zbioru pustego ani też całej przestrzeni). O zdarzeniach elementarnych należących do zbioru $A$ mówimy, że **sprzyjają** zajściu zdarzenia $A$. Zdarzenie elementarne $\omega$ sprzyja więc zajściu zdarzenia $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega \in A$.

Zdarzenie, któremu odpowiada pusty podzbiór $\emptyset$ przestrzeni $\Omega$, nazywamy zdarzeniem niemożliwym. Odznacza się ono tym, że przy konkretnych realizacjach danego eksperymentu losowego nigdy nie zachodzi (i nie może zajść).

Zdarzenie, któremu odpowiada podzbiór $\Omega$ przestrzeni $\Omega$ (czyli cała przestrzeń) nazywamy zdarzeniem pewnym. Odznacza się ono tym, że przy konkretnych realizacjach danego eksperymentu losowego zachodzi zawsze.

Niech $A \subset \Omega$ oraz $B \subset \Omega$ będą zdarzeniami. **Sumą** tych zdarzeń nazywamy zdarzenie polegające na tym, że zachodzi zdarzenie $A$ **lub** zachodzi zdarzenie $B$. Odpowiada mu podzbiór $A \cup B$ przestrzeni $\Omega$.

**Iloczynem** tych zdarzeń nazywamy zdarzenie polegające na tym, że zachodzi zdarzenie $A$ **i** zachodzi zdarzenie $B$. Odpowiada mu podzbiór $A \cap B$ przestrzeni $\Omega$.

**Różnicą** zdarzeń $A$ i $B$ nazywamy zdarzenie polegające na tym, że zachodzi zdarzenie $A$ i **nie** zachodzi zdarzenie $B$. Odpowiada mu podzbiór $A \setminus B$ przestrzeni $\Omega$.

**Zdarzeniem przeciwnym** do zdarzenia $A$ nazywamy zdarzenie polegające na tym, że **nie zachodzi** $A$. Odpowiada mu podzbiór $A' = \Omega \setminus A$ przestrzeni $\Omega$.

O zdarzeniach $A$ i $B$ takich, że $A \cap B = \emptyset$ mówimy, że wykluczają się wzajemnie (lub, że są rozłączne). Cechują się one tym, że przy konkretnych realizacjach danego eksperymentu losowego nigdy nie mogą zajść równocześnie (stąd nazwa).

Przykładem zdarzeń wykluczających się są zdarzenia $A \setminus B$ oraz $A \cap B$ (sporządzić odpowiedni rysunek).

Skoro zdarzenia są podzbiorami przestrzeni zdarzeń elementarnych, to podlegają one zwykłym prawom algebry zbiorów - wszystkich nie będę tu przytaczał. Przypomnę tylko niektóre (często używane):

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,,$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(są to prawa rozdzielności rachunku zbiorów),

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \qquad (A \cap B)' = A' \cup B',$$

$$(A_1 \cup ... \cup A_n)' = A_1' \cap ... \cap A_n', \qquad (A_1 \cap ... \cap A_n)' = A_1' \cup ... \cup A_n'$$

(tak zwane prawa de Morgana),

$$A \setminus B = A \cap B',$$

$$A \cup A' = \Omega, \qquad A \cap A' = \emptyset.$$

(Przypominam o tym, że wielką pomocą w tych zagadnieniach są prawidłowo sporządzone diagramy - rysunki).

# RP 2. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

## 1. Definicje i twierdzenia

Będziemy teraz zakładać, że przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ jest zbiorem skończonym. Przypominam, że zdarzeniami są podzbiory $A \subset \Omega$ tej przestrzeni. Rodzinę wszystkich podzbiorów przestrzeni $\Omega$ (czyli wszystkich zdarzeń) oznaczać będziemy symbolem $2^{\Omega}$.

***DEFINICJA 1.*** *Przy powyższym założeniu, prawdopodobieństwem określonym w przestrzeni $\Omega$ nazywamy każdą funkcję $P : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ przyporządkowującą dowolnemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ liczbę $P(A)$, spełniającą następujące warunki:*
*(P1)* $0 \leq P(A) \leq 1$ *dla każdego zdarzenia* $A \subset \Omega$.
*(P2)* $P(\Omega) = 1$ *i* $P(\emptyset) = 0$.
*(P3) Dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$ takich, że $A \cap B = \emptyset$ zachodzi równość:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Warunki (P1) - (P3) nazywamy aksjomatami prawdopodobieństwa.

Jeżeli $A \subset \Omega$, to liczbę $P(A)$ nazywamy **prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia** $A$ lub, krótko, prawdopodobieństwem tego zdarzenia.

***TWIERDZENIE 1.***
*Dana jest przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ i prawdopodobieństwo $P$ określone w tej przestrzeni. Dla wszystkich zdarzeń $A, B \subset \Omega$ prawdą jest, że:*
*(a) Jeżeli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$.*
*(b)* $P(A') = 1 - P(A)$.
*(c)* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

***TWIERDZENIE 2.***
*Dana jest przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ i prawdopodobieństwo $P$ określone w tej przestrzeni. Dla wszystkich zdarzeń $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$ parami się wykluczających (tj. takich, że $A_j \cap A_k = \emptyset$ dla wszystkich $j, k \in \{1, ..., n\}$ takich, że $j \neq k$) zachodzi równość:*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

***TWIERDZENIE 3***.

*Dana jest przestrzeń zdarzeń elementarnych* $\Omega$ *i prawdopodobieństwo* $P$ *określone w tej przestrzeni. Dla wszystkich zdarzeń* $A, B, C \subset \Omega$ *zachodzi równość:*

$$P(A \cup B \cup C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

# RP 3. Podstawowe schematy kombinatoryczne

## 1. Permutacje, wariacje itd.

Kombinatoryka to (mówiąc w pewnym uproszczeniu), nauka o zbiorach skończonych i funkcjach przekształcających takie zbiory w siebie, zaczniemy więc od pewnego oznaczenia. Liczbę elementów skończonego zbioru $A$ będziemy oznaczać symbolem:

$$|A|.$$

Tak więc, jeżeli $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ i elementy są wszystkie między sobą różne, to $|A| = n$.

Mamy zbiór skończony $Z$ mający $n$ elementów: $Z = \{z_1, ..., z_n\}$, $|Z| = n$.

**Permutacje.** Permutacją zbioru $n$-elementowego $Z = \{z_1, ..., z_n\}$ nazywamy każdy ciąg $n$-wyrazowy różnowartościowy postaci $(x_1, ..., x_n)$, gdzie $x_i \in Z$ dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$ oraz $x_i \neq x_j$, jeżeli tylko $i \neq j$, gdzie $i, j \in \{1, ..., n\}$. Liczbę wszystkich takich permutacji określa wzór

$$P_n = n!$$

W potocznej mowie, permutacja to każde ustawienie wszystkich elementów danego zbioru w ciąg (czyli z uwzględnieniem kolejności wyrazów). Jeżeli np. $Z = \{A, B, C\}$, to mamy sześć permutacji - $(A, B, C)$, $(A, C, B)$, $(B, A, C)$, $(B, C, A)$, $(C, A, B)$, $(C, B, A)$. A jeżeli $Z = \{1, 2\}$, permutacje są dwie - $(1, 2)$, $(2, 1)$.

**Wariacje bez powtórzeń.** Niech $1 \leq k \leq n$. Wtedy $k$-wyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru $n$-elementowego $Z = \{z_1, ..., z_n\}$ nazywamy każdy ciąg $k$-wyrazowy różnowartościowy postaci $(x_1, ..., x_k)$, gdzie $x_i \in Z$ dla każdego $i \in \{1, ..., k\}$ oraz $x_i \neq x_j$, jeżeli tylko $i \neq j$, gdzie $i, j \in \{1, ..., k\}$. Liczbę wszystkich takich wariacji określa wzór

$$V_k^n = n(n-1)(n-2)...(n-k+1),$$

który można także napisać w postaci:

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Wariacja bez powtórzeń to też ciąg, tylko nie muszą w nim występować wszystkie elementy z danego zbioru. Np. jeżeli $Z = \{A, B, C\}$, to trójwyrazowe wariacje bez powtórzeń to po prostu permutacje i jest ich 6. Zaś dwuwyrazowych wariacji bez powtórzeń jest tu przypadkiem też sześć: $(A, B)$, $(B, A)$, $(A, C)$, $(C, A)$, $(B, C)$, $(C, B)$.

**Wariacje z powtórzeniami.** Niech $k$ będzie dowolną liczbą naturalną Wtedy $k$-wyrazową wariacją z powtórzeniami zbioru $n$-elementowego $Z = \{z_1, ..., z_n\}$ nazywamy każdy ciąg $k$-wyrazowy postaci $(x_1, ..., x_k)$, gdzie $x_i \in Z$ dla każdego $i \in \{1, ..., k\}$. Liczbę wszystkich takich wariacji określa wzór

$$\overline{V}_k^n = n^k.$$

Wariacje z powtórzeniami tym się więc różnią od wariacji bez powtórzeń, że w ciągu wyrazy mogą się powtarzać (a jeżeli $k > n$, to nawet muszą się powtarzać). Np. pięciowyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru $Z = \{A, B, C\}$ jest dużo, bo $3^5$, jedną z nich jest np. $(B, A, A, C, B)$.

**Kombinacje.** Niech $0 \leq k \leq n$. Wtedy $k$-wyrazową kombinacją zbioru $n$-elementowego $Z = \{z_1, ..., z_n\}$ nazywamy każdy $k$-elementowy podzbiór (**nie ciąg!**)

$$\{x_1, ..., x_k\} \subset Z$$

tego zbioru. Liczbę wszystkich takich kombinacji określa wzór

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

(Uwaga: Podzbiór 0-elementowy to oczywiście zbiór pusty $\emptyset$. Jest on podzbiorem każdego zbioru.)

Przykładowo, 2-wyrazowe (mówi się też: 2-elementowe) kombinacje ze zbioru $Z = \{A, B, C\}$ są takie: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$ i jest ich tylko trzy, bo $\{B, A\}$ to to samo co $\{A, B\}$ (nie uwzględniamy kolejności), $\{C, A\}$ to to samo co $\{A, C\}$, zaś $\{C, B\}$ to to samo co $\{B, C\}$. Dlatego tylko trzy.

## 2. Rodzina podzbiorów danego zbioru (zbiór potęgowy).

Mamy zbiór skończony $Z$ mający $n$ elementów: $Z = \{z_1, ..., z_n\}$, $|Z| = n$. Zbiór wszystkich podzbiorów tego zbioru lub, jak często mówimy, rodzinę wszystkich jego podzbiorów oznaczamy symbolem:

$$2^Z.$$

(Używa się też nazwy: zbiór potęgowy).

Liczbę elementów rodziny $2^Z$ wszystkich podzbiorów $n$-elementowego zbioru $Z$ określa użyteczny wzór:

$$\left|2^Z\right| = 2^{|Z|} = 2^n.$$

Przykładowo, niech $Z = \{1, 2, 3\}$. Mamy tu:

$$2^Z = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Liczymy podzbiory w rodzinie $2^Z$ i stwierdzamy, że jest ich osiem. Istotnie, $|Z| = 3$, więc $\left|2^Z\right| = 2^3 = 8$ - w ścisłej zgodzie z teorią.

### 3. Iloczyn kartezjański zbiorów.

Dane są dwa zbiory: $Z$ oraz $W$. Iloczynem kartezjańskim (lub produktem kartezjańskim) tych zbiorów nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych $(z, w)$, gdzie $z \in Z$ i w$\in$ $W$. Zbiór ten oznaczamy symbolem:

$$Z \times W.$$

Przykładowo, niech $Z = \{A, B, C\}$ oraz $W = \{1, 2\}$. Iloczyn kartezjański tych zbiorów liczy sobie sześć par:

$$Z \times W = \{(A, 1), (A, 2), (B, 1), (B, 2), (C, 1), (C, 2)\}.$$

W przypadku zbiorów skończonych mamy prosty wzór podający liczbę elelentów ich iloczynu kartezjańskiego.

Mianowicie, jeżeli $Z = \{z_1, ..., z_n\}$, $|Z| = n$ oraz $W = \{w_1, ..., w_k\}$, $|Z| = k$, to

$$|Z \times W| = n \cdot k.$$

# RP 4. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Zakładamy ponownie, że przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ jest zbiorem skończonym. Przypominam, że $|A|$ oznacza liczbę elementów skończonego zbioru $A$.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa wygląda następująco.

***DEFINICJA 1.*** *Prawdopodobieństwem (w sensie klasycznym) określonym w przestrzeni $\Omega$ nazywamy funkcję $P : 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$ przyporządkowującą dowolnemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ liczbę $P(A)$ określoną wzorem:*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Można łatwo sprawdzić, że tak określona funkcja $P$ spełnia aksjomaty (P1) - (P3) (zob. tekst **RP2**).

# RP 5. Prawdopodobieństwo warunkowe

Zakładamy ponownie, że przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ jest zbiorem skończonym. Przypominam, że $|A|$ oznacza liczbę elementów skończonego zbioru $A \subset \Omega$.
Wybieramy dowolne zdarzenie losowe $B$ takie, że $P(B) > 0$.

***DEFINICJA 1.*** *Każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ możemy przypisać liczbę*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \tag{1}$$

*zwaną **prawdopodobieństwem warunkowym** zdarzenia $A$ przy **warunku** $B$.*

Można łatwo sprawdzić, że tak określona funkcja $P$ spełnia aksjomaty (P1) - (P3) (zob. tekst **RP2**).

**Interpretacja.** Przypuśćmy, że nie znamy wyniku danego eksperymentu losowego (któremu odpowiada przestrzeń $\Omega$), lecz mamy całkowicie pewną informację, że w jego wyniku zaszło zdarzenie $B$. Możemy teraz potraktować zbiór $B$ jako **nową** przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega_B = B$ (skoro zdarzenie $B$ na pewno zaszło). W tej nowej przestrzeni zajściu zdarzenia $A$ będą sprzyjać tylko zdarzenia elementarne ze zbioru $A \cap B$, czyli takie, przy których zachodzi i zdarzenie $A$, i zdarzenie $B$. Zgodnie ze wzorem na prawdopodobieństwo klasyczne (zob. tekst **RP4**) prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A$ w tej sytuacji będzie równe

$$\frac{|A \cap B|}{|\Omega_B|},$$

mamy jednak równości:

$$\frac{|A \cap B|}{|\Omega_B|} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

co jest ściśle zgodne ze wzorem (1).

Tak wiec prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia $A$ przy warunku $B$ możemy interpretować jako prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A$ w sytuacji, gdy dysponujemy informacją, że na pewno zaszło zdarzenie $B$.

# RP 6. Prawdopodobieństwo całkowite

Zakładamy ponownie, że przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ jest zbiorem skończonym.

Niech będą dane zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_k \subset \Omega$. Będziemy mówić, że te zdarzenia tworzą **zupełny układ zdarzeń** w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, P)$ (funkcja $P$ jest oczywiście prawdopodobieństwem w przestrzeni $\Omega$), jeżeli spełnione są warunki:

(1) $P(B_i) > 0$ dla każdego $i \in \{1, ..., k\}$.
(2) $P(B_i \cap B_j) = 0$ dla wszystkich $i, j \in \{1, ..., k\}$ takich, że $i \neq j$.
(3) $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k = \Omega$.

Tak więc $\{B_1, B_2, ..., B_k\}$ jest zupełnym układem zdarzeń wtedy, gdy każde ze zdarzeń $B_i$ ma dodatnie prawdopodobieństwo (żaden spośród zbiorów $B_i$ nie jest pusty), zdarzenia parami wykluczają się i zawsze zachodzi dokładnie jedno spośród tych zdarzeń.

***TWIERDZENIE 1***. *Jeżeli $\{B_1, B_2, ..., B_k\}$ jest zupełnym układem zdarzeń w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, P)$, to dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi równość:*

$$P(A) = P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + ... + P(A|B_k)\,P(B_k). \tag{1}$$

**Uwaga.** Przy rozważaniu takich sytuacji można pomagać sobie odpowiednimi wykresami (graf, "drzewko'). Metoda ta daje oczywiście wyniki ściśle zgodne ze wzorem (1).

# RP 7. Niezależność zdarzeń

Zakładamy ponownie, że przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ jest zbiorem skończonym.

***DEFINICJA 1.*** *Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ nazywamy* ***niezależnymi*** *w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, P)$, jeżeli zachodzi równość:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{1}$$

**Uwaga.** Jeżeli zdarzenia $A$ i $B$ są niezależne i $P(B) > 0$, to ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe (zob. tekst **RP5**) otrzymujemy:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A),$$

czyli informacja o zajściu zdarzenia $B$ "nie wpływa" na wartość prawdopodobieństwa zdarzenia $A$ - prawdopodobieństwo $P(A|B)$ zajścia tego zdarzenia przy warunku $B$ jest takie samo, jak "zwykłe" (bezwarunkowe) prawdopodobieństwo $P(A)$ tego zdarzenia. Stąd nazwa: "zdarzenia niezależne".

# RP 8. Schemat Bernoulliego

Ze schematem Bernoulliego mamy do czynienia wówczas, gdy rozważany eksperyment losowy polega na wykonaniu serii identycznych, kolejno po sobie następujących doświadczeń losowych (zwanych **próbami Bernoulliego**). Istotne jest przy tym, by były spełnione założenia:

1. Wynik każdej próby nie wpływa na wyniki innych prób (wyniki kolejnych prób są więc zdarzeniami niezależnymi, zob. tekst **RP7**).

2. Każda poszczególna próba dać może jeden z dwóch możliwych wyników. (Zwyczajowo jeden z tych wyników nazywamy **sukcesem**, zaś drugi - **porażką**. To, co w pojedynczej próbie uznamy za sukces, zależy oczywiście od naszego wyboru).

Typowe sytuacje, w których mamy do czynienia ze schematem Bernoulliego, to np. wykonanie serii rzutów monetą (lub kością do gry), wykonanie serii kolejnych losowań kul z urny o ustalonym składzie (ze zwracaniem, tak że skład urny się nie zmienia - to ważne), itp.

Oznaczmy przez $p$ prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie, zaś przez $q$ - prawdopodobieństwo porażki. Ponieważ dla pojedynczej próby sukces i porażka są zdarzeniami wzjemnie przeciwnymi, więc zachodzi równość:

$$p + q = 1.$$

Poza tymi wielkościami, związanymi ze sobą powyższą równością, trzecim istotnym parametrem określającym dany schemat Bernoulliego jest liczba $n$ prób w serii. (Mówi się niekiedy; "długość serii".)

Najczęściej zadawanym pytaniem jest pytanie o prawdopodobieństwo tego, że wykonując serię $n$ prób Bernoulliego uzyskamy w niej dokładnie $k$ sukcesów. (Pytanie takie ma oczywiście sens wtedy, gdy $k$ jest jedną z liczb ze zbioru $\{0, 1, ..., n\}$).

Odpowiedź daje następujące twierdzenie.

***TWIERDZENIE 1.*** *Niech $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie $k$ sukcesów w serii $n$ prób Bernoulliego dane jest wzorem:*

$$P(k; n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

*gdzie $p$ oznacza prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie, zaś $q$ - prawdopodobieństwo porażki.*