Sprawdzian 1, cz. A (29.X.2019, kl. IIa). Rozwiązania

Zestawy: 1, 9

Zadanie 1. O ciągu arytmetycznym (a_n) wiadomo, że $a_2 + a_8 = 5$, $a_5 + a_{11} = 7$. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a_{14}.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \tag{*}$$

wynika, że $a_2 = a_1 + r$, $a_8 = a_1 + 7r$, $a_5 = a_1 + 4r$, $a_{11} = a_1 + 10r$ (gdzie r oznacza różnicę ciągu). Skoro zaś $a_2 + a_8 = 5$, $a_5 + a_{11} = 7$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + r + a_1 + 7r = 5, \\ a_1 + 4r + a_1 + 10r = 7, \end{cases}$$

lub po uproszczeniu:

$$\begin{cases} 2a_1 + 8r = 5, \\ 2a_1 + 14r = 7. \end{cases}$$

Odejmując (stronami) od drugiego równania pierwsze otrzymujemy: $6r = 2$, zatem $r = \frac{1}{3}$. Podstawiając to do np. pierwszego równania otrzymujemy równość:

$$2a_1 + 8 \cdot \frac{1}{3} = 5,$$

z której wynika, że $a_1 = \frac{7}{6}$.

Wobec tego $a_n = \frac{7}{6} + \frac{1}{3}\,(n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_{14} = \frac{7}{6} + \frac{1}{3} \cdot (14 - 1) = \frac{11}{2}.$$

Odpowiedź: $a_n = \frac{7}{6} + \frac{1}{3}\,(n-1)\,,\ a_{14} = \frac{11}{2}.$

Zadanie 2. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_2 = 6$, $a_5 = \frac{81}{4}$. Obliczyć iloraz q tego ciągu.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{***}$$

wynika, że $a_2 = a_1 q$, $a_5 = a_1 q^4$ (gdzie q oznacza iloraz ciągu). Skoro zaś $a_2 = 6$, $a_5 = \frac{81}{4}$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 q = 6, \\ a_1 q^4 = \dfrac{81}{4}. \end{cases}$$

Pisząc drugie równanie w postaci: $a_1 q \cdot q^3 = \frac{81}{4}$ i korzystając z pierwszego równania otrzymujemy kolejno równości

$$6q^3 = \frac{81}{4},$$

$$q^3 = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3,$$

tak więc $q = \frac{3}{2}$.

Odpowiedź: $q = \frac{3}{2}$.

Zadanie 3. Wyrazy pierwszy i trzeci malejącego ciągu arytmetycznego są odpowiednio pierwszym i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Ich wspólny pierwszy wyraz jest równy 18, a drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest o 1 większy od drugiego wyrazu ciągu geometrycznego. Wyznaczyć te ciągi.

Rozwiązanie. W zadaniu chodzi o skończone, trójwyrazowe ciągi o pierwszym wyrazie 18. Oznaczmy więc drugi i trzeci wyraz ciągu arytmetycznego symbolami x i y, odpowiednio. Z zadania wynika, że trzeci wyraz ciągu geometrycznego też jest równy y. Drugi wyraz tego ciągu oznaczymy przez z. Mamy więc następującą sytuację: $(18, x, y)$ - to ciąg arytmetyczny, zaś $(18, z, y)$ - to ciąg geometryczny i z zadania wiemy, że $x = z + 1$. Zatem $z = x - 1$.

Ciąg arytmetyczny wygląda więc tak oto:

$$(18, x, y),$$

a ciąg geometryczny ma postać:

$$(18, x - 1, y).$$

Można teraz skorzystać ze znanego faktu, że kwadrat każdego wyrazu ciągu geometrycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$(x-1)^2 = 18y.$$

Z kolei dla ciągu arytmetycznego można skorzystać z faktu, że każdy wyraz dowolnego ciągu arytmetycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy średniej arytmetycznej wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$x = \frac{18+y}{2}.$$

Ostatecznie mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 18y, \\ x = \dfrac{18+y}{2}. \end{cases}$$

Drugie równanie przekształcamy do postaci: $2x = 18 + y$, stąd

$$y = 2x - 18. \qquad (*****)$$

Wstawiając to do pierwszego równania otrzymujemy, kolejno, równości:

$$(x-1)^2 = 18\,(2x-18)\,,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 36x - 324,$$

$$x^2 - 38x + 325 = 0,$$

$$(x-19)^2 - 361 + 325 = 0,$$

$$(x-19)^2 = 36,$$

$$x - 19 = 6 \text{ lub } x - 19 = -6$$

i, ostatecznie,

$$x = 25 \text{ lub } x = 13.$$

Mamy więc dwa rozwiązania: $x_1 = 25$, $x_2 = 13$. Ze wzoru na y (wzór (*****) otrzymujemy, odpowiednio, $y_1 = 32$, $y_2 = 8$. Ale ciąg $(18, x_1, y_1) = (18, 25, 32)$ jest co prawda ciągiem arytmetycznym, ale nie jest ciągiem malejącym. Musimy zatem odrzucić pierwsze rozwiązanie i pozostać przy drugim: $(18, x_2, y_2) = (18, 13, 8)$. Pozostaje jeszcze wyznaczyć z z równości

$$z = x - 1 = 13 - 1 = 12.$$

Odpowiedź: Ciągiem arytmetycznym jest ciąg $(18, 13, 8)$, a ciągiem geometrycznym jest ciąg $(18, 12, 8)$.

Zadanie 4. Liczby -4, $x+4$, 26 w podanej kolejności są pierwszym, trzecim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Obliczyć x.

Rozwiązanie. Niech (a_n) będzie tym ciągiem arytmetycznym, o który chodzi w zadaniu. Ogólny wzór na jego n-ty wyraz ma postać:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r, \tag{*}$$

i wiemy, że $a_1 = -4$. Wiemy też, że $a_5 = 26$, a z drugiej strony ze wzoru (*) mamy:

$$a_5 = a_1 + (5-1)\, r = -4 + 4r.$$

Otrzymujemy więc równość: $-4 + 4r = 26$, a stąd $r = \dfrac{15}{2}$.

Wobec tego $a_n = -4 + \dfrac{15}{2} \cdot (n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_3 = -4 + \frac{15}{2} \cdot (3-1) = 11,$$

a z drugiej strony podano w zadaniu, że $a_3 = x + 4$. Zatem $x + 4 = 11$, więc $x = 7$.

Odpowiedź: $x = 7$.

Zadanie 5. Obliczyć sumę A wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 3.

Rozwiązanie. Pierwszą taką liczbą jest $10 = 7 \cdot 1 + 3$, zaś ostatnią $94 = 7 \cdot 13 + 3$.

Jeżeli liczba naturalna x przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3, to da się ją zapisać w postaci: $x = 7k + 3$ (gdzie k jest liczbą naturalną). Wtedy mamy:

$$\begin{array}{rcl}
x & = & 7k + \mathbf{3}, \\
x+1 & = & 7k + \mathbf{4}, \\
x+2 & = & 7k + \mathbf{5}, \\
x+3 & = & 7k + \mathbf{6}, \\
x+4 & = & 7\,(k+1) + \mathbf{0}, \\
x+5 & = & 7\,(k+1) + \mathbf{1}, \\
x+6 & = & 7\,(k+1) + \mathbf{2}, \\
x+7 & = & 7\,(k+1) + \mathbf{3},
\end{array}$$

i tak dalej. Zatem kolejne reszty z dzielenia tych liczb przez 7 (zapisane wytłuszczoną czcionką) sa równe $3, 4, 5, 6, 0, 1, 2, 3...$. Skoro więc liczba x daje przy dzieleniu przez 7 resztę 3, to następną taką liczbą jest $x + 7$, następną - $x + 14$ itd. Liczby, o które chodzi, tworzą więc ciąg arytmetyczny (skończony) o pierwszym wyrazie $a_1 = 10$ i o różnicy $r = 7$:

$$(a_n) = (10, 17, ..., 94)$$

i poszukiwana liczba A jest po prostu sumą wszystkich wyrazów tego ciągu.

Chcemy teraz skorzystać ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n. \tag{**}$$

Aby zeń skorzystać, musimy znać liczbę wyrazów w rozważanym ciągu, czyli liczbę n. Jest to łatwe zadanie, bo wiemy, że $a_n = 94$. Z ogólnego wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, r \tag{*}$$

wynika równość:

$$94 = 10 + (n - 1) \cdot 7,$$

a z niej otrzymujemy: $n = 13$.

Teraz wystarczy wstawić wszystkie dane do wzoru (**) i mamy:

$$A = S_{13} = \left(\frac{10 + 94}{2}\right) \cdot 13 = 52 \cdot 13 = 676.$$

Odpowiedź: $A = 676$.

Zadanie 6. Liczby $2\sqrt{3}$, x, $x\sqrt{3}$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Obliczyć x.

Rozwiązanie. Skorzystamy ze znanego faktu, że w ciągu geometrycznym kwadrat każdego wyrazu (poza pierwszym i ewentualnie ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Zastosujemy ten fakt do drugiego wyrazu ciągu. Mamy zatem równanie:

$$x^2 = 2\sqrt{3} \cdot x\sqrt{3},$$

które kolejno przekształcamy w następujący sposób:

$$x^2 = 6x,$$

$$x^2 - 6x = 0,$$

$$x\,(x-6)=0,$$

otrzymując **dwa** rozwiązania: $x=0$ lub $x=6$.

Odpowiedź: $x=0$ lub $x=6$.

Zestawy: 2, 10

Zadanie 1. Liczby -13, $a-7$, -4 w podanej kolejności są drugim, trzecim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Obliczyć a.

Rozwiązanie. Niech (a_n) będzie tym ciągiem arytmetycznym, o który chodzi w zadaniu. Ogólny wzór na jego n-ty wyraz ma postać:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r, \tag{*}$$

i wiemy, że $a_2 = -13$. Wiemy też, że $a_5 = -4$, a z drugiej strony ze wzoru (*) mamy:

$$a_2 = a_1 + (2-1)\,r = a_1 + r$$

$$a_5 = a_1 + (5-1)\,r = a_1 + 4r.$$

Otrzymujemy więc układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + r = -13, \\ a_1 + 4r = -4, \end{cases}$$

a stąd $r = 3$ i $a_1 = -16$.

Wobec tego $a_n = -16 + 3\,(n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_3 = -16 + 3\,(3-1) = -10,$$

a z drugiej strony podano w zadaniu, że $a_3 = a - 7$. Zatem $a - 7 = -10$, więc $a = -3$.

Odpowiedź: $a = -3$.

Zadanie 2. Suma dwóch początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $\sqrt{2}$ równa jest $8\sqrt{2}$. Obliczyć iloraz q tego ciągu.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

wynika, że $a_2 = a_1 q$ (gdzie q oznacza iloraz ciągu). Skoro zaś $a_1 = \sqrt{2}$, to $a_2 = \sqrt{2}q$ i mamy równanie:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2}q = 8\sqrt{2},$$

z którego wynika, że $q = 7$.

Odpowiedź: $q = 7$.

Zadanie 3. Liczby $\frac{1}{x}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4x}$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Obliczyć x.

Rozwiązanie. Skorzystamy ze znanego faktu, że w ciągu geometrycznym kwadrat każdego wyrazu (poza pierwszym i ewentualnie ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Zastosujemy ten fakt do drugiego wyrazu ciągu. Mamy zatem równanie:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4x},$$

czyli

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{4x^2}$$

i dalej

$$x^2 = 4,$$

z czego wynika, że $x = -2$ lub $x = 2$.

Odpowiedź: $x = -2$ lub $x = 2$.

Zadanie 4. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_4 = 0$, $a_{14} = -10$. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a_{12}.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \tag{*}$$

wynika, że $a_4 = a_1 + 3r$, $a_{14} = a_1 + 13r$ (gdzie r oznacza różnicę ciągu). Skoro zaś $a_4 = 0$, $a_{14} = -10$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + 3r = 0, \\ a_1 + 13r = -10. \end{cases}$$

Z pierwszego równania wynika, że $a_1 = -3r$, a gdy to podstawimy do drugiego równania, otrzymujemy równość:

$$-3r + 13r = -10,$$

z której wynika, że $r = -1$, no i

$$a_1 = -3 \cdot (-1) = 3.$$

Wobec tego $a_n = 3 - (n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_{12} = 3 - (12 - 1) = -8.$$

Odpowiedź: $a_n = 3 - (n-1)$, $a_{12} = -8$.

Zadanie 5. Obliczyć sumę B wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 4.

Rozwiązanie. Pierwszą taką liczbą jest $14 = 5 \cdot 2 + 4$, zaś ostatnią $99 = 5 \cdot 19 + 4$.

Jeżeli liczba naturalna x przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4, to da się ją zapisać w postaci: $x = 5k + 4$ (gdzie k jest liczbą naturalną). Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} x &= 5k + \mathbf{4}, \\ x+1 &= 5(k+1) + \mathbf{0}, \\ x+2 &= 5(k+1) + \mathbf{1} \\ x+3 &= 5(k+1) + \mathbf{2} \\ x+4 &= 5(k+1) + \mathbf{3}, \\ x+5 &= 5(k+1) + \mathbf{4}, \end{aligned}$$

i tak dalej. Zatem kolejne reszty z dzielenia tych liczb przez 5 (zapisane wytłuszczoną czcionką) sa równe $4, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Skoro więc liczba x daje przy dzieleniu przez 5 resztę 4, to następną taką liczbą jest $x + 5$, następną - $x + 10$ itd. Liczby, o które chodzi, tworzą więc ciąg arytmetyczny (skończony) o pierwszym wyrazie $a_1 = 14$ i o różnicy $r = 5$:

$$(a_n) = (14, 19, \ldots, 99)$$

i poszukiwana liczba B jest po prostu sumą wszystkich wyrazów tego ciągu.

Chcemy teraz skorzystać ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n. \tag{**}$$

Aby zeń skorzystać, musimy znać liczbę wyrazów w rozważanym ciągu, czyli liczbę n. Jest to łatwe zadanie, bo wiemy, że $a_n = 99$. Z ogólnego wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r \tag{*}$$

wynika równość:

$$99 = 14 + (n-1) \cdot 5,$$

a z niej otrzymujemy: $n = 18$.

Teraz wystarczy wstawić wszystkie dane do wzoru (**) i mamy:

$$B = S_{18} = \left(\frac{14+99}{2}\right) \cdot 18 = 113 \cdot 9 = 1017.$$

Odpowiedź: $B = 1017$.

Zadanie 6. Wyrazy pierwszy i drugi malejącego ciągu arytmetycznego są odpowiednio pierwszym i drugim wyrazem ciągu geometrycznego. Ich wspólny pierwszy wyraz jest równy 9, a trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest o 4 mniejszy od trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego. Wyznaczyć te ciągi.

Rozwiązanie. W zadaniu chodzi o skończone, trójwyrazowe ciągi o pierwszym wyrazie 9. W takiej sytuacji często "nie opłaca się" korzystać z ogólnych wzorów. Oznaczmy więc drugi i trzeci wyraz ciągu arytmetycznego symbolami x i y, odpowiednio. Z zadania wynika, że drugi wyraz ciągu geometrycznego też jest równy x. Trzeci wyraz tego ciągu oznaczymy przez z. Mamy więc następującą sytuację: $(9, x, y)$ - to ciąg arytmetyczny, zaś $(9, x, z)$ - to ciąg geometryczny i z zadania wiemy, że $y = z - 4$. Zatem $z = y + 4$.

Ciąg arytmetyczny wygląda więc tak oto:

$$(9, x, y)\,,$$

a ciąg geometryczny ma postać:

$$(9, x, y+4)\,.$$

Można więc skorzystać ze znanego faktu, że kwadrat każdego wyrazu ciągu geometrycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$x^2 = 9\,(y+4)\,.$$

Z kolei dla ciągu arytmetycznego można skorzystać z faktu, że każdy wyraz dowolnego ciągu arytmetycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy średniej arytmetycznej wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$x = \frac{9+y}{2}.$$

Ostatecznie mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = 9\,(y+4)\,, \\ x = \dfrac{9+y}{2}. \end{cases}$$

Drugie równanie przekształcamy do postaci: $2x = 9 + y$, stąd

$$y = 2x - 9. \tag{***}$$

Wstawiając to do pierwszego równania otrzymujemy, kolejno, równości:

$$x^2 = 9\,(2x-5)\,,$$

$$x^2 = 18x - 45,$$

$$x^2 - 18x + 45 = 0,$$

$$(x-9)^2 - 81 + 45 = 0,$$

$$(x-9)^2 = 36,$$

$$x - 9 = 6 \text{ lub } x - 9 = -6$$

i, ostatecznie,

$$x = 15 \text{ lub } x = 3.$$

Mamy więc dwa rozwiązania: $x_1 = 15$, $x_2 = 3$. Ze wzoru na y (wzór (***) otrzymujemy, odpowiednio, $y_1 = 21$, $y_2 = -3$. Ale ciąg $(9, x_1, y_1) = (9, 15, 21)$ jest co prawda ciągiem arytmetycznym, ale nie jest ciągiem malejącym. Musimy zatem odrzucić pierwsze rozwiązanie i pozostać przy drugim: $(9, x_2, y_2) = (9, 3, -3)$. Pozostaje jeszcze wyznaczyć z z równości

$$z = y + 4 = -3 + 4 = 1.$$

Odpowiedź: Ciągiem arytmetycznym jest ciąg $(9, 3, -3)$, a ciągiem geometrycznym jest ciąg $(9, 3, 1)$.

Zestawy: 3, 11

Zadanie 1. O ciągu arytmetycznym (a_n) wiadomo, że $a_2+a_6=36$, $a_1+a_8=43$. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a_3.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \tag{*}$$

wynika, że $a_2 = a_1 + r$, $a_6 = a_1 + 5r$, $a_8 = a_1 + 7r$ (gdzie r oznacza różnicę ciągu). Skoro zaś $a_2 + a_6 = 36$, $a_1 + a_8 = 43$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + r + a_1 + 5r = 36, \\ a_1 + a_1 + 7r = 43, \end{cases}$$

lub po uproszczeniu:

$$\begin{cases} 2a_1 + 6r = 36, \\ 2a_1 + 7r = 43. \end{cases}$$

Odejmując (stronami) od drugiego równania pierwsze otrzymujemy: $r = 7$. Podstawiając to do np. pierwszego równania otrzymujemy równość:

$$2a_1 + 6 \cdot 7 = 36,$$

z której wynika, że $a_1 = -3$.

Wobec tego $a_n = -3 + 7\,(n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_3 = -3 + 7 \cdot (3-1) = 11.$$

Odpowiedź: $a_n = -3 + 7\,(n-1)\,,\ a_3 = 11.$

Zadanie 2. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = 4$, $a_5 = 8$. Obliczyć pierwszy wyraz a_1 tego ciągu.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{*}$$

wynika, że $a_3 = a_1q^2$, $a_5 = a_1q^4$ (gdzie q oznacza iloraz ciągu). Skoro zaś $a_3 = 2$, $a_5 = 4$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1q^2 = 4, \\ a_1q^4 = 8. \end{cases}$$

Z podanych danych wynika, że $a_1 \neq 0$ i $q \neq 0$ (w przeciwnym wypadku mielibyśmy $a_3 = 0$ i $a_5 = 0$). Dzieląc drugie równanie przez pierwsze (obustronnie) otrzymujemy:

$$q^2 = 2,$$

z którego wynika, że $q = \sqrt{2}$ lub $q = -\sqrt{2}$. W obydwu przypadkach mamy: $q^2 = 2$, a skoro $a_3 = a_1q^2$, to $a_3 = 2a_1$, czyli $4 = 2a_1$. Wobec tego $a_1 = 2$.

Odpowiedź: $a_1 = 2$.

Zadanie 3. Wyrazy pierwszy i trzeci rosnącego ciągu arytmetycznego są odpowiednio pierwszym i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Ich wspólny pierwszy wyraz jest równy 18, a drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest o 1 większy od drugiego wyrazu ciągu geometrycznego. Wyznaczyć te ciągi.

Rozwiązanie. W zadaniu chodzi o skończone, trójwyrazowe ciągi o pierwszym wyrazie 18. Oznaczmy więc drugi i trzeci wyraz ciągu arytmetycznego symbolami x i y, odpowiednio. Z zadania wynika, że trzeci wyraz ciągu geometrycznego też jest równy y. Drugi wyraz tego ciągu oznaczymy przez z. Mamy więc następującą sytuację: $(18, x, y)$ - to ciąg arytmetyczny, zaś $(18, z, y)$ - to ciąg geometryczny i z zadania wiemy, że $x = z + 1$. Zatem $z = x - 1$.

Ciąg arytmetyczny wygląda więc tak oto:

$$(18, x, y)\,,$$

a ciąg geometryczny ma postać:

$$(18, x - 1, y)\,.$$

Można teraz skorzystać ze znanego faktu, że kwadrat każdego wyrazu ciągu geometrycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$(x - 1)^2 = 18y.$$

Z kolei dla ciągu arytmetycznego można skorzystać z faktu, że każdy wyraz dowolnego ciągu arytmetycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy średniej arytmetycznej wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$x = \frac{18 + y}{2}.$$

Ostatecznie mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 18y, \\ x = \dfrac{18+y}{2}. \end{cases}$$

Drugie równanie przekształcamy do postaci: $2x = 18 + y$, stąd

$$y = 2x - 18. \qquad (*****)$$

Wstawiając to do pierwszego równania otrzymujemy, kolejno, równości:

$$(x-1)^2 = 18\,(2x - 18)\,,$$
$$x^2 - 2x + 1 = 36x - 324,$$
$$x^2 - 38x + 325 = 0,$$
$$(x-19)^2 - 361 + 325 = 0,$$
$$(x-19)^2 = 36,$$
$$x - 19 = 6 \text{ lub } x - 19 = -6$$

i, ostatecznie,

$$x = 25 \text{ lub } x = 13.$$

Mamy więc dwa rozwiązania: $x_1 = 25$, $x_2 = 13$. Ze wzoru na y (wzór (*****) otrzymujemy, odpowiednio, $y_1 = 32$, $y_2 = 8$. Ale ciąg $(18, x_2, y_2) = (18, 13, 8)$ jest co prawda ciągiem arytmetycznym, ale nie jest ciągiem rosnącym. Musimy zatem odrzucić drugie rozwiązanie i pozostać przy pierwszym: $(18, x_1, y_1) = (18, 25, 32)$. Pozostaje jeszcze wyznaczyć z z równości

$$z = x - 1 = 25 - 1 = 24.$$

Odpowiedź: Ciągiem arytmetycznym jest ciąg $(18, 25, 32)$, a ciągiem geometrycznym jest ciąg $(18, 24, 32)$.

Zadanie 4. Liczby 29, $y + 2$, 1 w podanej kolejności są pierwszym, czwartym i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Obliczyć y.

Rozwiązanie. Niech (a_n) będzie tym ciągiem arytmetycznym, o który chodzi w zadaniu. Ogólny wzór na jego n-ty wyraz ma postać:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r, \tag{*}$$

i wiemy, że $a_1 = 29$. Wiemy też, że $a_5 = 1$, a z drugiej strony ze wzoru (*) mamy:

$$a_5 = a_1 + (5-1)\,r = 29 + 4r.$$

Otrzymujemy więc równość: $29 + 4r = 1$, a stąd $r = -7$.

Wobec tego $a_n = 29 - 7\,(n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_4 = 29 - 7\,(4-1) = 8,$$

a z drugiej strony podano w zadaniu, że $a_4 = y + 2$. Zatem $y + 2 = 8$, więc $y = 6$.

Odpowiedź: $y = 6$.

Zadanie 5. Obliczyć sumę C wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 6 dają resztę 2.

Rozwiązanie. Pierwszą taką liczbą jest $14 = 6 \cdot 2 + 2$, zaś ostatnią $98 = 6 \cdot 16 + 2$.

Jeżeli liczba naturalna x przy dzieleniu przez 6 daje resztę 2, to da się ją zapisać w postaci: $x = 6k + 2$ (gdzie k jest liczbą naturalną). Wtedy mamy:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 6k + \mathbf{2}, \\ x+1 & = & 6k + \mathbf{3}, \\ x+2 & = & 6k + \mathbf{4}, \\ x+3 & = & 6k + \mathbf{5}, \\ x+4 & = & 6\,(k+1) + \mathbf{0}, \\ x+5 & = & 6\,(k+1) + \mathbf{1}, \\ x+6 & = & 6\,(k+1) + \mathbf{2}, \end{array}$$

i tak dalej. Zatem kolejne reszty z dzielenia tych liczb przez 6 (zapisane wytłuszczoną czcionką) sa równe $2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, \ldots$. Skoro więc liczba x daje przy dzieleniu przez 6 resztę 2, to następną taką liczbą jest $x + 6$, następną - $x + 12$ itd. Liczby, o które chodzi, tworzą więc ciąg arytmetyczny (skończony) o pierwszym wyrazie $a_1 = 14$ i o różnicy $r = 6$:

$$(a_n) = (14, 20, \ldots, 98)$$

i poszukiwana liczba C jest po prostu sumą wszystkich wyrazów tego ciągu.

Chcemy teraz skorzystać ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n. \tag{**}$$

Aby zeń skorzystać, musimy znać liczbę wyrazów w rozważanym ciągu, czyli liczbę n. Jest to łatwe zadanie, bo wiemy, że $a_n = 98$. Z ogólnego wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r \tag{*}$$

wynika równość:

$$98 = 14 + (n-1) \cdot 6,$$

a z niej otrzymujemy: $n = 15$.

Teraz wystarczy wstawić wszystkie dane do wzoru (**) i mamy:

$$C = S_{15} = \left(\frac{14 + 98}{2}\right) \cdot 15 = 56 \cdot 15 = 840.$$

Odpowiedź: $C = 840$.

Zadanie 6. Liczby 3, $-2-x$, $3x$ w podanej kolejności są drugim, trzecim i czwartym wyrazem ciągu geometrycznego. Obliczyć x.

Rozwiązanie. Skorzystamy ze znanego faktu, że w ciągu geometrycznym kwadrat każdego wyrazu (poza pierwszym i ewentualnie ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Zastosujemy ten fakt do trzeciego wyrazu ciągu. Mamy zatem równanie:

$$(-2-x)^2 = 3 \cdot 3x,$$

które kolejno przekształcamy w następujący sposób:

$$x^2 + 4x + 4 = 9x,$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0,$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

$$x - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad x - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2},$$

$$x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2},$$

i mamy dwa rozwiązania: $x = 1$ lub $x = 4$.

Odpowiedź: $x = 1$ lub $x = 4$.

Zestawy: 4, 12

Zadanie 1. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_2 = 16$, $a_7 = 1$. Obliczyć a_5.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \qquad (*)$$

wynika, że $a_2 = a_1 + r$, $a_7 = a_1 + 6r$ (gdzie r oznacza różnicę ciągu). Skoro zaś $a_2 = 16$, $a_7 = 1$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + r = 16, \\ a_1 + 6r = 1. \end{cases}$$

Z pierwszego równania wynika, że $a_1 = 16 - r$, a gdy to podstawimy do drugiego równania, otrzymujemy równość:

$$16 - r + 6r = 1,$$

z której wynika, że $r = -3$, no i

$$a_1 = 16 - r = 19.$$

Wobec tego $a_n = 19 - 3\,(n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_5 = 19 - 3 \cdot (5-1) = 7.$$

Odpowiedź: $a_5 = 7$.

Zadanie 2. Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie 2 równa jest $\dfrac{43}{2}$. Obliczyć pierwszy wyraz a_1 tego ciągu.

Rozwiązanie: Ze wzoru na sumę n wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

otrzymujemy równanie:

$$a_1 \cdot \left(\frac{1-2^6}{1-2} \right) = \frac{43}{2},$$

czyli

$$63a_1 = \frac{43}{2},$$

a stąd $a_1 = \dfrac{43}{126}$.

Odpowiedź: $a_1 = \dfrac{43}{126}$.

Zadanie 3. Liczby x, $2x$, $\frac{4}{3}$ w podanej kolejności są drugim, trzecim i czwartym wyrazem ciągu geometrycznego. Obliczyć x.

Rozwiązanie. Skorzystamy ze znanego faktu, że w ciągu geometrycznym kwadrat każdego wyrazu (poza pierwszym i ewentualnie ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Zastosujemy ten fakt do trzeciego wyrazu ciągu. Mamy zatem równanie:

$$(2x)^2 = \frac{4}{3} \cdot x,$$

czyli

$$4x^2 = \frac{4}{3} \cdot x,$$

i dalej

$$4x\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0,$$

z czego wynika, że $x = 0$ lub $x = \dfrac{1}{3}$. Rozwiązanie $x = 0$ musimy odrzucić, ponieważ ciąg $\left(0, 0, \dfrac{4}{3}\right)$ nie jest ciągiem geometrycznym.

Odpowiedź: $x = \dfrac{1}{3}$.

Zadanie 4. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = 1$, $a_6 = 64$. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a_2.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \qquad (*)$$

wynika, że $a_3 = a_1q^2$, $a_6 = a_1q^5$ (gdzie q oznacza iloraz ciągu). Skoro zaś $a_3 = 1$, $a_6 = 64$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1q^2 = 1, \\ a_1q^5 = 64. \end{cases}$$

Z podanych danych wynika, że $a_1 \neq 0$ i $q \neq 0$ (w przeciwnym wypadku mielibyśmy $a_2 = 0$ i $a_5 = 0$). Dzieląc drugie równanie przez pierwsze (obustronnie) otrzymujemy:

$$q^3 = 64,$$

z którego wynika, że $q = 4$. Skoro $a_3 = a_1q^2$, to $a_3 = 16a_1$, czyli $1 = 16a_1$. Wobec tego $a_1 = \frac{1}{16}$. Ze wzoru (*) mamy:

$$a_2 = \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}.$$

Odpowiedź: $a_n = \frac{1}{16} \cdot 4^{n-1}, \quad a_2 = \frac{1}{4}.$

Zadanie 5. Obliczyć sumę D wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 5.

Rozwiązanie. Pierwszą taką liczbą jest $12 = 7 \cdot 1 + 5$, zaś ostatnią $96 = 7 \cdot 13 + 5$.

Jeżeli liczba naturalna x przy dzieleniu przez 7 daje resztę 5, to da się ją zapisać w postaci: $x = 7k + 5$ (gdzie k jest liczbą naturalną). Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} x &= 7k + \mathbf{5}, \\ x + 1 &= 7k + \mathbf{6}, \\ x + 2 &= 7(k+1) + \mathbf{0}, \\ x + 3 &= 7(k+1) + \mathbf{1}, \\ x + 4 &= 7(k+1) + \mathbf{2}, \\ x + 5 &= 7(k+1) + \mathbf{3}, \\ x + 6 &= 7(k+1) + \mathbf{4}, \\ x + 7 &= 7(k+1) + \mathbf{5}, \end{aligned}$$

i tak dalej. Zatem kolejne reszty z dzielenia tych liczb przez 7 (zapisane wytłuszczoną czcionką) sa równe $5, 6, 0, 1, 2, 3, 4, 5\ldots$. Skoro więc liczba x daje przy dzieleniu przez

7 resztę 5, to następną taką liczbą jest $x+7$, następną - $x+14$ itd. Liczby, o które chodzi, tworzą więc ciąg arytmetyczny (skończony) o pierwszym wyrazie $a_1 = 12$ i o różnicy $r = 7$:

$$(a_n) = (12, 19, ..., 96)$$

i poszukiwana liczba D jest po prostu sumą wszystkich wyrazów tego ciągu.

Chcemy teraz skorzystać ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n. \tag{**}$$

Aby zeń skorzystać, musimy znać liczbę wyrazów w rozważanym ciągu, czyli liczbę n. Jest to łatwe zadanie, bo wiemy, że $a_n = 96$. Z ogólnego wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r \tag{*}$$

wynika równość:

$$96 = 12 + (n-1) \cdot 7,$$

a z niej otrzymujemy: $n = 13$.

Teraz wystarczy wstawić wszystkie dane do wzoru (**) i mamy:

$$D = S_{13} = \left(\frac{12+96}{2}\right) \cdot 13 = 54 \cdot 13 = 702.$$

Odpowiedź: $D = 702$.

Zadanie 6. Wyrazy pierwszy i drugi rosnącego ciągu arytmetycznego są odpowiednio pierwszym i drugim wyrazem ciągu geometrycznego. Ich wspólny pierwszy wyraz jest równy 9, a trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest o 4 mniejszy od trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego. Wyznaczyć te ciągi.

Rozwiązanie. W zadaniu chodzi o skończone, trójwyrazowe ciągi o pierwszym wyrazie 9. Oznaczmy więc drugi i trzeci wyraz ciągu arytmetycznego symbolami x i y, odpowiednio. Z zadania wynika, że drugi wyraz ciągu geometrycznego też jest równy x. Trzeci wyraz tego ciągu oznaczymy przez z. Mamy więc następującą sytuację: $(9, x, y)$ - to ciąg arytmetyczny, zaś $(9, x, z)$ - to ciąg geometryczny i z zadania wiemy, że $y = z - 4$. Zatem $z = y + 4$.

Ciąg arytmetyczny wygląda więc tak oto:

$$(9, x, y)\,,$$

a ciąg geometryczny ma postać:

$$(9, x, y+4).$$

Można więc skorzystać ze znanego faktu, że kwadrat każdego wyrazu ciągu geometrycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$x^2 = 9(y+4).$$

Z kolei dla ciągu arytmetycznego można skorzystać z faktu, że każdy wyraz dowolnego ciągu arytmetycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy średniej arytmetycznej wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$x = \frac{9+y}{2}.$$

Ostatecznie mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = 9(y+4), \\ x = \dfrac{9+y}{2}. \end{cases}$$

Drugie równanie przekształcamy do postaci: $2x = 9 + y$, stąd

$$y = 2x - 9. \tag{***}$$

Wstawiając to do pierwszego równania otrzymujemy, kolejno, równości:

$$x^2 = 9(2x-5),$$

$$x^2 = 18x - 45,$$
$$x^2 - 18x + 45 = 0,$$
$$(x-9)^2 - 81 + 45 = 0,$$
$$(x-9)^2 = 36,$$
$$x - 9 = 6 \text{ lub } x - 9 = -6$$

i, ostatecznie,

$$x = 15 \text{ lub } x = 3.$$

Mamy więc dwa rozwiązania: $x_1 = 15$, $x_2 = 3$. Ze wzoru na y (wzór (***) otrzymujemy, odpowiednio, $y_1 = 21$, $y_2 = -3$. Ale ciąg $(9, x_2, y_2) = (9, 3, -3)$ jest co prawda ciągiem arytmetycznym, ale nie jest ciągiem rosnącym. Musimy zatem odrzucić drugie rozwiązanie i pozostać przy pierwszym: $(9, x_1, y_1) = (9, 15, 21)$. Pozostaje jeszcze wyznaczyć z z równości

$$z = y + 4 = 21 + 4 = 25.$$

Odpowiedź: Ciągiem arytmetycznym jest ciąg $(9, 15, 21)$, a ciągiem geometrycznym jest ciąg $(9, 15, 25)$.

Zestawy: 5, 13

Zadanie 1. Liczby -23, $z-5$, 1 w podanej kolejności są pierwszym, drugim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Obliczyć z.

Rozwiązanie. Niech (a_n) będzie tym ciągiem arytmetycznym, o który chodzi w zadaniu. Ogólny wzór na jego n-ty wyraz ma postać:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r, \tag{*}$$

i wiemy, że $a_1 = -23$. Wiemy też, że $a_5 = 1$, a z drugiej strony ze wzoru (*) mamy:

$$a_5 = a_1 + (5-1)\,r = 1 + 4r.$$

Otrzymujemy więc równość: $-23 + 4r = 1$, a stąd $r = 6$.

Wobec tego $a_n = -23 + 6\,(n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_2 = -23 + 6\,(2-1) = -17,$$

a z drugiej strony podano w zadaniu, że $a_2 = z-5$. Zatem $z-5 = -17$, więc $z = -12$.

Odpowiedź: $z = -12$.

Zadanie 2. Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie -2 jest równa 11. Obliczyć pierwszy wyraz a_1 tego ciągu.

Rozwiązanie: Ze wzoru na sumę n wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

otrzymujemy równanie:

$$a_1 \cdot \left(\frac{1-(-2)^5}{1-(-2)}\right) = 11,$$

czyli

$$11a_1 = 11,$$

a stąd $a_1 = 1$.

Odpowiedź: $a_1 = 1$.

Zadanie 3. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_1 = \frac{20}{9}$, $a_3 = \frac{80}{81}$. Obliczyć iloraz q tego ciągu.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{***}$$

wynika, że $a_3 = a_1 q^2$ (gdzie q oznacza iloraz ciągu). Skoro zaś $a_1 = \frac{20}{9}$, $a_3 = \frac{80}{81}$, to mamy równanie:

$$\frac{20}{9} q^2 = \frac{80}{81},$$

czyli

$$q^2 = \frac{4}{9},$$

tak więc

$$q = \frac{2}{3} \text{ lub } q = -\frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: Warunki podane w zadaniu spełniają dwa ciągi geometryczne o ilorazach, odpowiednio, $q' = \frac{2}{3}$ oraz $q'' = -\frac{2}{3}$.

Zadanie 4. O ciągu arytmetycznym (a_n) wiadomo, że $a_3 + a_9 = -8$, $a_6 + a_{10} = -12$. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a_4.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r \tag{*}$$

wynika, że $a_3 = a_1 + 2r$, $a_9 = a_1 + 8r$, $a_6 = a_1 + 5r$, $a_{10} = a_1 + 9r$ (gdzie r oznacza różnicę ciągu). Skoro zaś $a_3 + a_9 = -8$, $a_6 + a_{10} = -12$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + 2r + a_1 + 8r = -8, \\ a_1 + 5r + a_1 + 9r = -12, \end{cases}$$

lub po uproszczeniu:

$$\begin{cases} 2a_1 + 10r = -8, \\ 2a_1 + 14r = -12. \end{cases}$$

Odejmując (stronami) od drugiego równania pierwsze otrzymujemy: $4r = -4$, więc $r = -1$. Podstawiając to do np. pierwszego równania otrzymujemy równość:

$$2a_1 + 10 \cdot (-1) = -8,$$

z której wynika, że $a_1 = 1$.

Wobec tego $a_n = 1 - (n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_4 = 1 - (4-1) = -2.$$

Odpowiedź: $a_n = 1 - (n-1)$, $a_4 = -2$.

Zadanie 5. Obliczyć sumę E wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1.

Rozwiązanie. Pierwszą taką liczbą jest $10 = 3 \cdot 3 + 1$, zaś ostatnią $97 = 3 \cdot 32 + 1$.

Jeżeli liczba naturalna x przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, to da się ją zapisać w postaci: $x = 3k + 1$ (gdzie k jest liczbą naturalną). Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} x &= 3k + \mathbf{1}, \\ x + 1 &= 3k + \mathbf{2}, \\ x + 2 &= 3(k+1) + \mathbf{0}, \\ x + 3 &= 7(k+1) + \mathbf{1}, \end{aligned}$$

i tak dalej. Zatem kolejne reszty z dzielenia tych liczb przez 3 (zapisane wytłuszczoną czcionką) sa równe $1, 2, 0, 1, \ldots$. Skoro więc liczba x daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, to następną taką liczbą jest $x + 3$, następną - $x + 6$ itd. Liczby, o które chodzi, tworzą więc ciąg arytmetyczny (skończony) o pierwszym wyrazie $a_1 = 10$ i o różnicy $r = 3$:

$$(a_n) = (10, 13, ..., 97)$$

i poszukiwana liczba E jest po prostu sumą wszystkich wyrazów tego ciągu.

Chcemy teraz skorzystać ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n. \tag{**}$$

Aby zeń skorzystać, musimy znać liczbę wyrazów w rozważanym ciągu, czyli liczbę n. Jest to łatwe zadanie, bo wiemy, że $a_n = 97$. Z ogólnego wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1) r \tag{*}$$

wynika równość:

$$97 = 10 + (n-1) \cdot 3,$$

a z niej otrzymujemy: $n = 30$.

Teraz wystarczy wstawić wszystkie dane do wzoru (**) i mamy:

$$E = S_{30} = \left(\frac{10+97}{2}\right) \cdot 30 = 107 \cdot 15 = 1605.$$

Odpowiedź: $E = 1605$.

Zadanie 6. Liczby 16, $x-5$, x w podanej kolejności są trzecim, czwartym i piątym wyrazem ciągu geometrycznego. Obliczyć x.

Rozwiązanie. Skorzystamy ze znanego faktu, że w ciągu geometrycznym kwadrat każdego wyrazu (poza pierwszym i ewentualnie ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Zastosujemy ten fakt do czwartego wyrazu ciągu. Mamy zatem równanie:

$$(x-5)^2 = 16 \cdot x,$$

które kolejno przekształcamy w następujący sposób:

$$x^2 - 10x + 25 = 16x,$$

$$x^2 - 26x + 25 = 0,$$

$$(x-13)^2 - 169 + 25 = 0,$$

$$(x-13)^2 = 144,$$

$$x - 13 = 12 \quad \text{lub} \quad x - 13 = -12,$$

i mamy dwa rozwiązania: $x = 1$ lub $x = 25$.

Odpowiedź: $x = 1$ lub $x = 25$.

Zestawy: 6, 14

Zadanie 1. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_5 = 3$, $a_{10} = 13$. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a_6.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \tag{*}$$

wynika, że $a_5 = a_1 + 4r$, $a_{10} = a_1 + 9r$ (gdzie r oznacza różnicę ciągu). Skoro zaś $a_5 = 3$, $a_{10} = 13$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + 4r = 3, \\ a_1 + 9r = 13. \end{cases}$$

Z pierwszego równania wynika, że $a_1 = 3 - 4r$, a gdy to podstawimy do drugiego równania, otrzymujemy równość:

$$3 - 4r + 9r = 13,$$

z której wynika, że $r = 2$, no i

$$a_1 = 3 - 4 \cdot 2 = -5.$$

Wobec tego $a_n = -5 + 2\,(n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_6 = -5 + 2 \cdot (6-1) = 5.$$

Odpowiedź: $a_n = -5 + 2\,(n-1)\,, \quad a_6 = 5.$

Zadanie 2. Liczby 6, 3, $c + \frac{1}{4}$ w podanej kolejności są drugim, trzecim i piątym wyrazem ciągu geometrycznego. Obliczyć c.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{*}$$

wynika, że $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_1 q^2$ (gdzie q oznacza iloraz ciągu). Skoro zaś $a_2 = 6$, $a_3 = 3$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 q = 6, \\ a_1 q^2 = 3. \end{cases}$$

Pisząc drugie równanie w postaci: $a_1 q \cdot q = 3$ stwierdzamy, że $6q = 3$, czyli $q = \frac{1}{2}$. Z pierwszego równania otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} a_1 = 6,$$

czyli $a_1 = 12$. Ze wzoru (*) obliczamy piąty wyraz ciągu:

$$a_5 = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{4},$$

a w zadaniu podano, że $a_5 = c + \frac{1}{4}$. Więc $\frac{3}{4} = c + \frac{1}{4}$, czyli $c = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $c = \frac{1}{2}$.

Zadanie 3. Liczby $6 - a$, -1, -10 w podanej kolejności są pierwszym, drugim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Obliczyć a.

Rozwiązanie. Niech (a_n) będzie tym ciągiem arytmetycznym, o który chodzi w zadaniu. Ogólny wzór na jego n-ty wyraz ma postać:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r, \tag{*}$$

i wiemy, że $a_2 = -1$. Wiemy też, że $a_5 = -10$, a z drugiej strony ze wzoru (*) wynika, że:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + r, \\ a_5 = a_1 + 4r, \end{cases}$$

co daje układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + r = -1, \\ a_1 + 4r = -10, \end{cases}$$

skąd wynika, że $r = -3$ i $a_1 = 2$. Z drugiej strony podano w zadaniu, że $a_1 = 6 - a$. Zatem $6 - a = 2$, więc $a = 4$.

Odpowiedź: $a = 4$.

Zadanie 4. Obliczyć sumę F wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 3.

Rozwiązanie. Pierwszą taką liczbą jest $13 = 5 \cdot 2 + 3$, zaś ostatnią $98 = 5 \cdot 19 + 3$.

Jeżeli liczba naturalna x przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to da się ją zapisać w postaci: $x = 5k + 3$ (gdzie k jest liczbą naturalną). Wtedy mamy:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 5k + \mathbf{3}, \\ x+1 & = & 5k + \mathbf{4}, \\ x+2 & = & 5(k+1) + \mathbf{0} \\ x+3 & = & 5(k+1) + \mathbf{1} \\ x+4 & = & 5(k+1) + \mathbf{2}, \\ x+5 & = & 5(k+1) + \mathbf{3}, \end{array}$$

i tak dalej. Zatem kolejne reszty z dzielenia tych liczb przez 5 (zapisane wytłuszczoną czcionką) sa równe $3, 4, 0, 1, 2, 3, \ldots$. Skoro więc liczba x daje przy dzieleniu przez 5 resztę 3, to następną taką liczbą jest $x + 5$, następną - $x + 10$ itd. Liczby, o które chodzi, tworzą więc ciąg arytmetyczny (skończony) o pierwszym wyrazie $a_1 = 13$ i o różnicy $r = 5$:

$$(a_n) = (13, 18, ..., 98)$$

i poszukiwana liczba F jest po prostu sumą wszystkich wyrazów tego ciągu.

Chcemy teraz skorzystać ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n. \tag{**}$$

Aby zeń skorzystać, musimy znać liczbę wyrazów w rozważanym ciągu, czyli liczbę n. Jest to łatwe zadanie, bo wiemy, że $a_n = 98$. Z ogólnego wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r \tag{*}$$

wynika równość:

$$98 = 13 + (n-1) \cdot 5,$$

a z niej otrzymujemy: $n = 18$.

Teraz wystarczy wstawić wszystkie dane do wzoru (**) i mamy:

$$F = S_{18} = \left(\frac{13 + 98}{2}\right) \cdot 18 = 111 \cdot 9 = 999.$$

Odpowiedź: $F = 999$.

Zadanie 5. Suma czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie -3 równa jest 20. Obliczyć pierwszy wyraz a_1 tego ciągu.

Rozwiązanie. Ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

(prawdziwego w przypadku, gdy $q \neq 1$, a tak właśnie jest w tym zadaniu) i z danych zadania wynika, że

$$S_4 = a_1 \left[\frac{1-(-3)^4}{1-(-3)} \right].$$

Skoro zaś $S_4 = 40$, to mamy równanie:

$$a_1 \left[\frac{1-(-3)^4}{1-(-3)} \right] = 20,$$

czyli

$$a_1 \cdot \left(-\frac{80}{4} \right) = 20,$$

zatem $a_1 = -1$.

Odpowiedź: $a_1 = -1$.

Zadanie 6. Wyrazy pierwszy i drugi malejącego ciągu arytmetycznego są odpowiednio pierwszym i drugim wyrazem ciągu geometrycznego. Ich wspólny pierwszy wyraz jest równy 9, a trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest o 4 mniejszy od trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego. Wyznaczyć te ciągi.

Rozwiązanie. W zadaniu chodzi o skończone, trójwyrazowe ciągi o pierwszym wyrazie 9. W takiej sytuacji często "nie opłaca się" korzystać z ogólnych wzorów. Oznaczmy więc drugi i trzeci wyraz ciągu arytmetycznego symbolami x i y, odpowiednio. Z zadania wynika, że drugi wyraz ciągu geometrycznego też jest równy x. Trzeci wyraz tego ciągu oznaczymy przez z. Mamy więc następującą sytuację: $(9, x, y)$ - to ciąg arytmetyczny, zaś $(9, x, z)$ - to ciąg geometryczny i z zadania wiemy, że $y = z - 4$. Zatem $z = y + 4$.

Ciąg arytmetyczny wygląda więc tak oto:

$$(9, x, y)\,,$$

a ciąg geometryczny ma postać:

$$(9, x, y+4)\,.$$

Można więc skorzystać ze znanego faktu, że kwadrat każdego wyrazu ciągu geometrycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$x^2 = 9\,(y+4)\,.$$

Z kolei dla ciągu arytmetycznego można skorzystać z faktu, że każdy wyraz dowolnego ciągu arytmetycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy średniej arytmetycznej wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$x = \frac{9+y}{2}.$$

Ostatecznie mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = 9\,(y+4)\,, \\ x = \dfrac{9+y}{2}. \end{cases}$$

Drugie równanie przekształcamy do postaci: $2x = 9 + y$, stąd

$$y = 2x - 9. \qquad (***)$$

Wstawiając to do pierwszego równania otrzymujemy, kolejno, równości:

$$x^2 = 9\,(2x-5)\,,$$

$$x^2 = 18x - 45,$$

$$x^2 - 18x + 45 = 0,$$

$$(x-9)^2 - 81 + 45 = 0,$$

$$(x-9)^2 = 36,$$

$$x - 9 = 6 \text{ lub } x - 9 = -6$$

i, ostatecznie,

$$x = 15 \text{ lub } x = 3.$$

Mamy więc dwa rozwiązania: $x_1 = 15$, $x_2 = 3$. Ze wzoru na y (wzór (***) otrzymujemy, odpowiednio, $y_1 = 21$, $y_2 = -3$. Ale ciąg $(9, x_1, y_1) = (9, 15, 21)$ jest co prawda ciągiem arytmetycznym, ale nie jest ciągiem malejącym. Musimy zatem odrzucić pierwsze rozwiązanie i pozostać przy drugim: $(9, x_2, y_2) = (9, 3, -3)$. Pozostaje jeszcze wyznaczyć z z równości

$$z = y + 4 = -3 + 4 = 1.$$

Odpowiedź: Ciągiem arytmetycznym jest ciąg $(9, 3, -3)$, a ciągiem geometrycznym jest ciąg $(9, 3, 1)$.

Zestawy: 7, 15

Zadanie 1. O ciągu arytmetycznym (a_n) wiadomo, że $a_1 + a_4 = 23$, $a_2 + a_6 = 44$. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a_5.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \tag{*}$$

wynika, że $a_4 = a_1 + 3r$, $a_2 = a_1 + r$, $a_6 = a_1 + 5r$ (gdzie r oznacza różnicę ciągu). Skoro zaś $a_1 + a_4 = 23$, $a_2 + a_6 = 44$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 3r = 23, \\ a_1 + r + a_1 + 5r = 44, \end{cases}$$

lub po uproszczeniu:

$$\begin{cases} 2a_1 + 3r = 23, \\ 2a_1 + 6r = 44. \end{cases}$$

Odejmując (stronami) od drugiego równania pierwsze otrzymujemy: $3r = 21$, więc $r = 7$. Podstawiając to do np. pierwszego równania otrzymujemy równość:

$$2a_1 + 3 \cdot 7 = 23,$$

z której wynika, że $a_1 = 1$.

Wobec tego $a_n = 1 + 7\,(n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_5 = 1 + 7 \cdot (5-1) = 29.$$

Odpowiedź: $a_n = 1 + 7\,(n-1)\,,\ a_5 = 29.$

Zadanie 2. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_2 = 3\sqrt{3}$, $a_6 = 12\sqrt{3}$. Obliczyć pierwszy wyraz a_1 tego ciągu.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{*}$$

wynika, że $a_2 = a_1 q$, $a_6 = a_1 q^5$ (gdzie q oznacza iloraz ciągu). Skoro zaś $a_2 = 3\sqrt{3}$, $a_6 = 12\sqrt{3}$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 q = 3\sqrt{3}, \\ a_1 q^5 = 12\sqrt{3}. \end{cases}$$

Z podanych danych wynika, że $a_1 \neq 0$ i $q \neq 0$ (w przeciwnym wypadku mielibyśmy $a_2 = 0$ i $a_6 = 0$). Dzieląc drugie równanie przez pierwsze (obustronnie) otrzymujemy:

$$q^4 = 4,$$

skąd wynika, że $q = \sqrt{2}$ lub $q = -\sqrt{2}$. Z pierwszego równania układu wynika, że gdy $q = \sqrt{2}$, to $a_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, zaś gdy $q = -\sqrt{2}$, to $a_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Odpowiedź: $a_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ lub $a_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Zadanie 3. Wyrazy pierwszy i trzeci rosnącego ciągu arytmetycznego są odpowiednio pierwszym i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Ich wspólny pierwszy wyraz jest równy 18, a drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest o 1 większy od drugiego wyrazu ciągu geometrycznego. Wyznaczyć te ciągi.

Rozwiązanie. W zadaniu chodzi o skończone, trójwyrazowe ciągi o pierwszym wyrazie 18. Oznaczmy więc drugi i trzeci wyraz ciągu arytmetycznego symbolami x i y, odpowiednio. Z zadania wynika, że trzeci wyraz ciągu geometrycznego też jest równy y. Drugi wyraz tego ciągu oznaczymy przez z. Mamy więc następującą sytuację: $(18, x, y)$ - to ciąg arytmetyczny, zaś $(18, z, y)$ - to ciąg geometryczny i z zadania wiemy, że $x = z + 1$. Zatem $z = x - 1$.

Ciąg arytmetyczny wygląda więc tak oto:

$$(18, x, y)\,,$$

a ciąg geometryczny ma postać:

$$(18, x - 1, y)\,.$$

Można teraz skorzystać ze znanego faktu, że kwadrat każdego wyrazu ciągu geometrycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$(x - 1)^2 = 18y.$$

Z kolei dla ciągu arytmetycznego można skorzystać z faktu, że każdy wyraz dowolnego ciągu arytmetycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy średniej arytmetycznej wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$x = \frac{18 + y}{2}.$$

Ostatecznie mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 18y, \\ x = \dfrac{18+y}{2}. \end{cases}$$

Drugie równanie przekształcamy do postaci: $2x = 18 + y$, stąd

$$y = 2x - 18. \tag{*****}$$

Wstawiając to do pierwszego równania otrzymujemy, kolejno, równości:

$$(x-1)^2 = 18\,(2x - 18)\,,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 36x - 324,$$
$$x^2 - 38x + 325 = 0,$$
$$(x-19)^2 - 361 + 325 = 0,$$
$$(x-19)^2 = 36,$$
$$x - 19 = 6 \text{ lub } x - 19 = -6$$

i, ostatecznie,

$$x = 25 \text{ lub } x = 13.$$

Mamy więc dwa rozwiązania: $x_1 = 25$, $x_2 = 13$. Ze wzoru na y (wzór (*****) otrzymujemy, odpowiednio, $y_1 = 32$, $y_2 = 8$. Ale ciąg $(18, x_2, y_2) = (18, 13, 8)$ jest co prawda ciągiem arytmetycznym, ale nie jest ciągiem rosnącym. Musimy zatem odrzucić drugie rozwiązanie i pozostać przy pierwszym: $(18, x_1, y_1) = (18, 25, 32)$. Pozostaje jeszcze wyznaczyć z z równości

$$z = x - 1 = 25 - 1 = 24.$$

Odpowiedź: Ciągiem arytmetycznym jest ciąg $(18, 25, 32)$, a ciągiem geometrycznym jest ciąg $(18, 24, 32)$.

Zadanie 4. Liczby 4, 7, $3 - x$ w podanej kolejności są drugim, trzecim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Obliczyć x.

Rozwiązanie. Niech (a_n) będzie tym ciągiem arytmetycznym, o który chodzi w zadaniu. Ogólny wzór na jego n-ty wyraz ma postać:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r, \tag{*}$$

i wiemy, że $a_2 = 4$. Wiemy też, że $a_3 = 7$, a z drugiej strony ze wzoru (*) mamy:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r, \\ a_3 &= a_1 + (3-1)\,r = a_1 + 2r. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + r = 4, \\ a_1 + 2r = 7, \end{cases}$$

a stąd $a_1 = 1$ i $r = 3$.

Wobec tego $a_n = 1 + 3\,(n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_5 = 1 + 3\,(5-1) = 13,$$

a z drugiej strony podano w zadaniu, że $a_3 = 3 - x$. Zatem $3 - x = 13$, więc $x = -10$.

Odpowiedź: $x = -10$.

Zadanie 5. Obliczyć sumę G wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 6 dają resztę 0.

Rozwiązanie. Pierwszą taką liczbą jest $12 = 6 \cdot 2 + 0$, zaś ostatnią $96 = 6 \cdot 16 + 0$.

Jeżeli liczba naturalna x przy dzieleniu przez 6 daje resztę 0, to da się ją zapisać w postaci: $x = 6k + 0$ (gdzie k jest liczbą naturalną). Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} x &= 6k + \mathbf{0}, \\ x+1 &= 6k + \mathbf{1}, \\ x+2 &= 6k + \mathbf{2}, \\ x+3 &= 6k + \mathbf{3}, \\ x+4 &= 6k + \mathbf{4}, \\ x+5 &= 6k + \mathbf{5}, \\ x+6 &= 6\,(k+1) + \mathbf{0}, \end{aligned}$$

i tak dalej. Zatem kolejne reszty z dzielenia tych liczb przez 6 (zapisane wytłuszczoną czcionką) sa równe $0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, \ldots$. Skoro więc liczba x daje przy dzieleniu przez

6 resztę 0, to następną taką liczbą jest $x+6$, następną - $x+12$ itd. Liczby, o które chodzi, tworzą więc ciąg arytmetyczny (skończony) o pierwszym wyrazie $a_1 = 12$ i o różnicy $r = 6$:

$$(a_n) = (12, 18, ..., 96)$$

i poszukiwana liczba G jest po prostu sumą wszystkich wyrazów tego ciągu.

Chcemy teraz skorzystać ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n. \tag{**}$$

Aby zeń skorzystać, musimy znać liczbę wyrazów w rozważanym ciągu, czyli liczbę n. Jest to łatwe zadanie, bo wiemy, że $a_n = 96$. Z ogólnego wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r \tag{*}$$

wynika równość:

$$96 = 12 + (n-1) \cdot 6,$$

a z niej otrzymujemy: $n = 15$.

Teraz wystarczy wstawić wszystkie dane do wzoru (**) i mamy:

$$G = S_{15} = \left(\frac{12+96}{2}\right) \cdot 15 = 54 \cdot 15 = 810.$$

Odpowiedź: $G = 810$.

Zadanie 6. Liczby x, $x{+}3$, 16 w podanej kolejności są drugim, trzecim i czwartym wyrazem ciągu geometrycznego. Obliczyć x.

Rozwiązanie. Skorzystamy ze znanego faktu, że w ciągu geometrycznym kwadrat każdego wyrazu (poza pierwszym i ewentualnie ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Zastosujemy ten fakt dotrzeciego wyrazu ciągu. Mamy zatem równanie:

$$(x+3)^2 = 16 \cdot x,$$

które kolejno przekształcamy w następujący sposób:

$$x^2 + 6x + 9 = 16x,$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0,$$

$$(x-5)^2 - 25 + 9 = 0,$$

$$(x-5)^2 = 16,$$

$$x-5=4 \quad \text{lub} \quad x-5=-4$$

i mamy dwa rozwiązania: $x = 1$ lub $x = 9$.

Odpowiedź: $x = 1$ lub $x = 9$.

Zestawy: 8, 16

Zadanie 1. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_4 = 4$, $a_{10} = 12$. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a_6.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \tag{*}$$

wynika, że $a_4 = a_1 + 3r$, $a_{10} = a_1 + 9r$ (gdzie r oznacza różnicę ciągu). Skoro zaś $a_4 = 4$, $a_{10} = 12$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + 3r = 4, \\ a_1 + 9r = 12. \end{cases}$$

Z pierwszego równania wynika, że $a_1 = 4 - 3r$, a gdy to podstawimy do drugiego równania, otrzymujemy równość:

$$4 - 3r + 9r = 12,$$

z której wynika, że $r = \frac{4}{3}$, no i

$$a_1 = 4 - 3 \cdot \frac{4}{3} = 0.$$

Wobec tego $a_n = \frac{4}{3}\,(n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_6 = \frac{4}{3} \cdot (6-1) = \frac{20}{3}.$$

Odpowiedź: $a_n = \frac{4}{3}\,(n-1)\,, \quad a_6 = \frac{20}{3}.$

Zadanie 2. Liczby 3, $-2-x$, $3x$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Obliczyć x.

Rozwiązanie. Skorzystamy ze znanego faktu, że w ciągu geometrycznym kwadrat każdego wyrazu (poza pierwszym i ewentualnie ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Zastosujemy ten fakt do drugiego wyrazu ciągu. Mamy zatem równanie:

$$(-2-x)^2 = 3 \cdot 3x,$$

które kolejno przekształcamy w następujący sposób:

$$x^2 + 4x + 4 = 9x,$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

otrzymując równanie kwadratowe z **dwoma** rozwiązaniami: $x = 1$ lub $x = 4$.

Odpowiedź: $x = 1$ lub $x = 4$.

Zadanie 3. Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy -2 równa jest 48. Obliczyć pierwszy wyraz a_1 tego ciągu.

Rozwiązanie: Ze wzoru na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$S_n = \frac{2na_1 + rn(n-1)}{2}$$

otrzymujemy równanie:

$$\frac{2 \cdot 6a_1 + (-2) \cdot 6 \cdot (6-1)}{2} = 48,$$

czyli

$$6a_1 - 30 = 48,$$

a stąd $a_1 = 13$.

Odpowiedź: $a_1 = 13$.

Zadanie 4. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_2 = 6$, $a_5 = \frac{16}{9}$. Obliczyć pierwszy wyraz a_1.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{*}$$

wynika, że $a_2 = a_1 q$, $a_5 = a_1 q^4$ (gdzie q oznacza iloraz ciągu). Skoro zaś $a_2 = 6$, $a_5 = \frac{16}{9}$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 q = 6, \\ a_1 q^4 = \frac{16}{9}. \end{cases}$$

Z podanych danych wynika, że $a_1 \neq 0$ i $q \neq 0$ (w przeciwnym wypadku mielibyśmy $a_3 = 0$ i $a_5 = 0$). Dzieląc drugie równanie przez pierwsze (obustronnie) otrzymujemy:

$$q^3 = \frac{8}{27},$$

z którego wynika, że $q = \frac{2}{3}$. Skoro $a_2 = a_1 q$, to $a_2 = \frac{2}{3} a_1$, czyli $6 = \frac{2}{3} a_1$. Wobec tego $a_1 = 9$.

Odpowiedź: $a_1 = 9$.

Zadanie 5. Obliczyć sumę H wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 8 dają resztę 1.

Rozwiązanie. Pierwszą taką liczbą jest $17 = 8 \cdot 2 + 1$, zaś ostatnią $97 = 8 \cdot 12 + 1$.
Jeżeli liczba naturalna x przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1, to da się ją zapisać w postaci: $x = 8k + 1$ (gdzie k jest liczbą naturalną). Wtedy mamy:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 8k + \mathbf{1}, \\ x+1 & = & 8k + \mathbf{2}, \\ x+2 & = & 8k + \mathbf{3}, \\ x+3 & = & 8k + \mathbf{4}, \\ x+4 & = & 8k + \mathbf{5}, \\ x+5 & = & 8k + \mathbf{6}, \\ x+6 & = & 8k + \mathbf{7}, \\ x+7 & = & 8(k+1) + \mathbf{0}, \\ x+7 & = & 8(k+1) + \mathbf{1}, \end{array}$$

i tak dalej. Zatem kolejne reszty z dzielenia tych liczb przez 8 (zapisane wytłuszczoną czcionką) sa równe $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 1...$. Skoro więc liczba x daje przy dzieleniu przez 8 resztę 1, to następną taką liczbą jest $x + 8$, następną - $x + 16$ itd. Liczby, o które chodzi, tworzą więc ciąg arytmetyczny (skończony) o pierwszym wyrazie $a_1 = 17$ i o różnicy $r = 8$:

$$(a_n) = (17, 25, ..., 97)$$

i poszukiwana liczba H jest po prostu sumą wszystkich wyrazów tego ciągu.

Chcemy teraz skorzystać ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n. \qquad (**)$$

Aby zeń skorzystać, musimy znać liczbę wyrazów w rozważanym ciągu, czyli liczbę n. Jest to łatwe zadanie, bo wiemy, że $a_n = 97$. Z ogólnego wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r \qquad (*)$$

wynika równość:

$$97 = 17 + (n-1) \cdot 8,$$

a z niej otrzymujemy: $n = 11$.

Teraz wystarczy wstawić wszystkie dane do wzoru (**) i mamy:

$$H = S_{11} = \left(\frac{17 + 97}{2}\right) \cdot 11 = 57 \cdot 11 = 627.$$

Odpowiedź: $H = 627$.

Zadanie 6. Wyrazy pierwszy i drugi rosnącego ciągu arytmetycznego są odpowiednio pierwszym i drugim wyrazem ciągu geometrycznego. Ich wspólny pierwszy wyraz jest równy 9, a trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest o 4 mniejszy od trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego. Wyznaczyć te ciągi.

Rozwiązanie. W zadaniu chodzi o skończone, trójwyrazowe ciągi o pierwszym wyrazie 9. Oznaczmy więc drugi i trzeci wyraz ciągu arytmetycznego symbolami x i y, odpowiednio. Z zadania wynika, że drugi wyraz ciągu geometrycznego też jest równy x. Trzeci wyraz tego ciągu oznaczymy przez z. Mamy więc następującą sytuację: $(9, x, y)$ - to ciąg arytmetyczny, zaś $(9, x, z)$ - to ciąg geometryczny i z zadania wiemy, że $y = z - 4$. Zatem $z = y + 4$.

Ciąg arytmetyczny wygląda więc tak oto:

$$(9, x, y)\,,$$

a ciąg geometryczny ma postać:

$$(9, x, y + 4)\,.$$

Można więc skorzystać ze znanego faktu, że kwadrat każdego wyrazu ciągu geometrycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$x^2 = 9\,(y+4)\,.$$

Z kolei dla ciągu arytmetycznego można skorzystać z faktu, że każdy wyraz dowolnego ciągu arytmetycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy średniej arytmetycznej wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$x = \frac{9+y}{2}.$$

Ostatecznie mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = 9\,(y+4)\,, \\ x = \dfrac{9+y}{2}. \end{cases}$$

Drugie równanie przekształcamy do postaci: $2x = 9 + y$, stąd

$$y = 2x - 9. \tag{***}$$

Wstawiając to do pierwszego równania otrzymujemy, kolejno, równości:

$$x^2 = 9\,(2x-5)\,,$$

$$x^2 = 18x - 45,$$

$$x^2 - 18x + 45 = 0,$$

$$(x-9)^2 - 81 + 45 = 0,$$

$$(x-9)^2 = 36,$$

$$x - 9 = 6 \text{ lub } x - 9 = -6$$

i, ostatecznie,

$$x = 15 \text{ lub } x = 3.$$

Mamy więc dwa rozwiązania: $x_1 = 15$, $x_2 = 3$. Ze wzoru na y (wzór (***) otrzymujemy, odpowiednio, $y_1 = 21$, $y_2 = -3$. Ale ciąg $(9, x_2, y_2) = (9, 3, -3)$ jest co prawda ciągiem arytmetycznym, ale nie jest ciągiem rosnącym. Musimy zatem odrzucić drugie rozwiązanie i pozostać przy pierwszym: $(9, x_1, y_1) = (9, 15, 21)$. Pozostaje jeszcze wyznaczyć z z równości

$$z = y + 4 = 21 + 4 = 25.$$

Odpowiedź: Ciągiem arytmetycznym jest ciąg $(9, 15, 21)$, a ciągiem geometrycznym jest ciąg $(9, 15, 25)$.