RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

klasa II 2018/19

Adam Stachura

Teoria10: Granica funkcji- definicja

1. Oznaczenia

Rozpatrujemy funkcję $f : D \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x)$, której dziedziną jest niepusty zbiór $D \subset \mathbb{R}$. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie dowolnie wybraną liczbą rzeczywistą (nie musi ona należeć do zbioru D).

Symbolem $\mathcal{S}(x_0)$ oznaczymy zbiór wszystkich ciągów nieskończonych (x_n), $n \in \mathbb{N}$, spełniających następujące trzy warunki:

1. $x_n \in D$ dla każdego wskaźnika $n \in \mathbb{N}$.
2. $x_n \neq x_0$ dla każdego wskaźnika $n \in \mathbb{N}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Symbol $\mathcal{S}_+(x_0)$ oznaczać będzie zbiór wszystkich ciągów nieskończonych (x_n), $n \in \mathbb{N}$, spełniających warunki 1. i 3., zaś w miejsce warunku 2. - warunek

2_+. $x_n > x_0$ dla każdego wskaźnika $n \in \mathbb{N}$.

Na koniec, symbol $\mathcal{S}_-(x_0)$ oznaczać będzie zbiór wszystkich ciągów nieskończonych (x_n), $n \in \mathbb{N}$, spełniających warunki 1. i 3., zaś w miejsce warunku 2. - warunek

2_-. $x_n < x_0$ dla każdego wskaźnika $n \in \mathbb{N}$.

Oczywiście określone powyżej zbiory ciągów mogą być puste. Nas interesować będzie sytuacja, w której tak nie jest.

I tak, jeżeli $\mathcal{S}(x_0) \neq \emptyset$, to znaczy jeżeli istnieje przynajmniej jeden ciąg (x_n), $n \in \mathbb{N}$, spełniający warunki 1., 2. i 3., mówimy, że x_0 jest **punktem skupienia** zbioru D (dziedziny funkcji f).

Jeżeli $\mathcal{S}_+(x_0) \neq \emptyset$, mówimy, że x_0 jest **prawostronnym punktem skupienia** zbioru D. Jeżeli zaś $\mathcal{S}_-(x_0) \neq \emptyset$, mówimy, że x_0 jest **lewostronnym punktem skupienia** zbioru D.

Każdy prawostronny (lewostronny) punkt skupienia zbioru D jest punktem skupienia tego zbioru, lecz niekoniecznie na odwrót - punkt x_0 może być tylko prawostronnym względnie tylko lewostronnym punktem skupienia. (Oczywiście x_0 może także w ogóle nie być punktem skupienia zbioru D).

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie dowolnie wybraną liczbą rzeczywistą. **Otoczeniem** punktu x_0 w zbiorze $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych (na osi liczbowej) nazywamy każdy przedział otwarty $(x_0 - r, x_0 + r)$, gdzie $r > 0$ jest dowolną liczbą dodatnią. **Sąsiedztwem** punktu x_0 nazywamy każdy zbiór postaci

$$(x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r),$$

gdzie $r > 0$ jest dowolną liczbą dodatnią. Przedział otwarty $(x_0 - r, x_0)$ nazywamy **lewostronnym sąsiedztwem** punktu x_0, zaś przedział otwarty $(x_0, x_0 + r)$ nazywamy **prawostronnym sąsiedztwem** tego punktu.

2. Podstawowe definicje

DEFINICJA 1. *Przypuśćmy, że x_0 jest punktem skupienia dziedziny D funkcji $f : D \to \mathbb{R}$.*

*Funkcja f ma w tym punkcie **granicę równą** g (nie wykluczamy przypadku, gdy $g = \pm\infty$), jeżeli dla każdego ciągu nieskończonego (x_n), $n \in \mathbb{N}$, należącego do zbioru $\mathcal{S}(x_0)$ zachodzi równość:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Piszemy wtedy:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \tag{1}$$

(czyt.: "funkcja f ma granicę g, gdy x dąży do x_0" lub "funkcja f dąży do g, gdy x dąży do x_0").

Oprócz zapisu (1) stosuje się także oznaczenie:

$$f(x) \xrightarrow{x\to x_0} g.$$

DEFINICJA 2. *Przypuśćmy, że x_0 jest prawostronnym punktem skupienia dziedziny D funkcji $f : D \to \mathbb{R}$.*

*Funkcja f ma w tym punkcie **granicę prawostronną równą** g, jeżeli dla każdego ciągu nieskończonego (x_n), $n \in \mathbb{N}$, należącego do zbioru $\mathcal{S}_+(x_0)$ zachodzi równość:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Piszemy wtedy:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g.$$

DEFINICJA 3. *Przypuśćmy, że x_0 jest lewostronnym punktem skupienia dziedziny D funkcji $f : D \to \mathbb{R}$.*

Funkcja f ma w tym punkcie ***granicę lewostronną równą*** *g, jeżeli dla każdego ciągu nieskończonego (x_n), $n \in \mathbb{N}$, należącego do zbioru $\mathcal{S}_-(x_0)$ zachodzi równość:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Piszemy wtedy:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g.$$

DEFINICJA 4. *Przypuśćmy, że x_0 jest punktem należącym do dziedziny D funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, i jednocześnie jest punktem skupienia tej dziedziny.*

Mówimy, że funkcja f jest ***ciągła*** *w punkcie x_0, jeżeli istnieje granica tej funkcji w punkcie x_0 i jest ona równa wartości funkcji w punkcie x_0 :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Jeżeli funkcja f jest ciągła w każdym punkcie pewnego zbioru $A \subset D$, to mówimy, że jest ciągła w zbiorze A.

Wszystkie funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Teoria11: Granica funkcji - podstawowe fakty

Rozpatrujemy funkcję $f : D \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x)$, której dziedziną jest niepusty zbiór $D \subset \mathbb{R}$. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie dowolnie wybraną liczbą rzeczywistą.

FAKT 1. *Przypuśćmy, że x_0 jest obustronnym punktem skupienia dziedziny D funkcji $f : D \to \mathbb{R}$.*

Granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją obydwie granice jednostronne: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ i są sobie równe.

Zachodzą wtedy równości:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

FAKT 2. *Przypuśćmy, że x_0 jest punktem skupienia dziedziny D funkcji $f : D \to \mathbb{R}$.*

Funkcja ma w punkcie x_0 granicę $g \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in D} 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Potocznie mówi się, że jeżeli argumenty x są bliskie x_0, to wartości funkcji w tych punktach "mało się różnią" od wartości granicznej g.

WNIOSEK 1.

(a) Przypuśćmy, że w punkcie x_0 istnieje skończona, dodatnia granica $g = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ funkcji $f : D \to \mathbb{R}$. Istnieją wtedy liczby dodatnie $r > 0$, $\delta > 0$ takie, że $f(x) \geq r$ dla każdej liczby $x \in D$ spełniającej warunek: $0 < |x - x_0| < \delta$.

(b) Przypuśćmy, że w punkcie x_0 istnieje skończona, ujemna granica $g = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ funkcji $f : D \to \mathbb{R}$. Istnieje wtedy liczba dodatnia $\delta > 0$ i liczba ujemna $s < 0$ takie, że $f(x) \leq s$ dla każdej liczby $x \in D$ spełniającej warunek: $0 < |x - x_0| < \delta$.

Teoria12: Granica funkcji - główne twierdzenia

TWIERDZENIE 1 *("twierdzenie o działaniach na granicach skończonych").*
Dane są funkcje $x \to f(x)$ *i* $x \to g(x)$, *określone w sąsiedztwie punktu* x_0 *oraz liczba rzeczywista* $c \in \mathbb{R}$. *Przypuśćmy, że obydwie funkcje mają granicę skończoną w punkcie* x_0. *Wtedy funkcje*

$$x \to cf(x), \quad x \to f(x) + g(x), \quad x \to f(x) - g(x), \quad x \to f(x)\,g(x)$$

również mają skończone granice w punkcie x_0 *i prawdziwe są równości:*

$$\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)\,g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right).$$

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, *to granicę posiada także funkcja* $x \to \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i ma miejsce równość*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)},$$

przy czym funkcja $x \to \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *jest określona w zbiorze tych wszystkich liczb* x *z rozważanego sąsiedztwa, dla których* $g(x) \neq 0$.

TWIERDZENIE 2 *("twierdzenie o nierównościach dla granic").*
Dane są funkcje $x \to f(x)$ *i* $x \to g(x)$, *określone w sąsiedztwie punktu* x_0. *Przypuśćmy, że obydwie funkcje mają granice (skończone lub nie) w punkcie* x_0. *Jeżeli* $f(x) \leq g(x)$ *dla każdej liczby* x *z rozważanego sąsiedztwa, to wówczas*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

TWIERDZENIE 3 *("twierdzenie o trzech funkcjach").*

Dane są funkcje $x \to f(x)$, $x \to g(x)$ i $x \to h(x)$, określone w sąsiedztwie punktu x_0.Przypuśćmy, że funkcje f i h mają granice (skończone lub nie) w punkcie x_0. Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ oraz nierówności: $f(x) \le g(x) \le h(x)$ zachodzą dla każdej liczby x z rozważanego sąsiedztwa, to wówczas funkcja $x \to g(x)$ ma granicę w punkcie x_0 i mają miejsce równości:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x).$$

UWAGA 1: Aby powyższe stwierdzenia miały sens, przyjmujemy dodatkową umowę: $-\infty \le g \le +\infty$ dla każdej skończonej liczby $g \in \mathbb{R}$.

TWIERDZENIE 4 *(twierdzenie o działaniach na granicach niewłaściwych).*
Dane są funkcje $x \to f(x)$ i $x \to g(x)$, określone w sąsiedztwie punktu x_0.

Jeżeli $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} A$ $(A \in \mathbb{R})$ i $g(x) \xrightarrow{x\to x_0} +\infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

Jeżeli $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} A$ $(A \in \mathbb{R})$ i $g(x) \xrightarrow{x\to x_0} -\infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$.

Jeżeli $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} +\infty$ i $g(x) \xrightarrow{x\to x_0} +\infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\, g(x)) = +\infty$.

Jeżeli $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} +\infty$ i $g(x) \xrightarrow{x\to x_0} -\infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\, g(x)) = -\infty$.

Jeżeli $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} -\infty$ i $g(x) \xrightarrow{x\to x_0} -\infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\, g(x)) = +\infty$.

Jeżeli $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} A$ $(A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ i $g(x) \xrightarrow{x\to x_0} +\infty$, to
$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\, g(x)) = \begin{cases} +\infty, & gdy\ A > 0, \\ -\infty, & gdy\ A < 0. \end{cases}$$

Jeżeli $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} A$ $(A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ i $g(x) \xrightarrow{x\to x_0} -\infty$, to
$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\, g(x)) = \begin{cases} -\infty, & gdy\ A > 0, \\ +\infty, & gdy\ A < 0. \end{cases}$$

Jeżeli $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} A$ $(A \in \mathbb{R})$ i $g(x) \xrightarrow{x\to x_0} \pm\infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$.

Jeżeli $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0$ i $f(x) > 0$ w rozważanym sąsiedztwie, to
$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = +\infty.$$

Jeżeli $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0$ i $f(x) < 0$ w rozważanym sąsiedztwie, to
$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\infty.$$

TWIERDZENIE 5.

(a) Dane są funkcje $x \to f(x)$ i $x \to g(x)$, określone w sąsiedztwie punktu x_0. Przypuśćmy, że $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. Jeżeli $f(x) \leq g(x)$ dla każdej liczby x z rozważanego sąsiedztwa, to wówczas $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

(b) Dane są funkcje $x \to f(x)$ i $x \to g(x)$, określone w sąsiedztwie punktu x_0. Przypuśćmy, że $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$. Jeżeli $f(x) \leq g(x)$ dla każdej liczby x z rozważanego sąsiedztwa, to wówczas $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

UWAGA 2: Powyższe twierdzenia zachodzą także dla granic jednostronnych. należy jedynie zamienić w sformułowaniach granicę na granicę lewostronną lub prawostronną, zaś sąsiedztwo na, odpowiednio, sąsiedztwo lewostronne lub prawostronne.

UWAGA 3: Przy obliczaniu granic należy zachować ostrożność w następujących sytuacjach:

(a) Obliczamy granicę $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x))$, gdzie $f(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ i $g(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.

(b) Obliczamy granicę $\lim_{x \to x_0} (f(x)\, g(x))$, gdzie $f(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ i $g(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} \pm\infty$.

(c) Obliczamy granicę $\lim_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)$, gdzie $f(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ i $g(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

(d) Obliczamy granicę $\lim_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)$, gdzie $f(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} \pm\infty$ i $g(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} \pm\infty$.

Mówimy, że mamy do czynienia z "**symbolami nieoznaczonymi**" (odpowiednio, typu "$\infty - \infty$", "$0 \cdot \infty$", "$\dfrac{0}{0}$", "$\dfrac{\infty}{\infty}$"). Każdą z tego typu granic należy traktować indywidualnie, a wyniku z góry nie można przewidzieć.

3. Pożyteczne wzory z teorii granic

Warto pamiętać, że

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$$

dla każdej liczby rzeczywistej $r > 0$.

(Np. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = +\infty$, itd.)

Natomiast

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

i podobnie, . $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$, itd.

Także

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1$$

dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$.

Prawdziwa jest też równość:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Teoria13: Granice w nieskończoności

1. Oznaczenia

Rozpatrujemy funkcję $f : D \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x)$, której dziedziną jest niepusty zbiór $D \subset \mathbb{R}$.

Symbol $\mathcal{S}(+\infty)$ oznaczać będzie zbiór wszystkich ciągów nieskończonych (x_n), $n \in \mathbb{N}_1$, takich, że $x_n \in D$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Natomiast symbol $\mathcal{S}(-\infty)$ oznaczać będzie zbiór wszystkich ciągów nieskończonych (x_n), $n \in \mathbb{N}_1$, takich, że $x_n \in D$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Oczywiście określone powyżej zbiory ciągów mogą być puste. Nas interesować będzie sytuacja, w której tak nie jest.

2. Definicje i fakty

DEFINICJA 1. *Przypuśćmy, że istnieje przynajmniej jeden ciąg nieskończony* (x_n), $n \in \mathbb{N}_1$, *należący do zbioru* $\mathcal{S}(+\infty)$.

Funkcja f ma przy x dążącym do $+\infty$ ***granicę równą*** *g (nie wykluczamy przypadku, gdy $g = \pm\infty$). jeżeli dla każdego ciągu nieskończonego (x_n), $n \in \mathbb{N}_1$, należącego do zbioru $\mathcal{S}(+\infty)$ zachodzi równość:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Piszemy wtedy:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = g. \tag{1}$$

(czyt.: "funkcja f ma granicę g, gdy x dąży do $+\infty$" lub "funkcja f dąży do g, gdy x dąży do $+\infty$").

Oprócz zapisu (1) stosuje się także oznaczenie:

$$f(x) \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} g.$$

DEFINICJA 2. *Przypuśćmy, że istnieje przynajmniej jeden ciąg nieskończony* (x_n), $n \in \mathbb{N}_1$, *należący do zbioru* $\mathcal{S}(-\infty)$.

Funkcja f ma przy x dążącym do $-\infty$ ***granicę równą*** *g (nie wykluczamy przypadku, gdy $g = \pm\infty$). jeżeli dla każdego ciągu nieskończonego (x_n), $n \in \mathbb{N}_1$, należącego do zbioru $\mathcal{S}(-\infty)$ zachodzi równość:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Piszemy wtedy:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = g.$$

Twierdzenia i fakty dotyczące granic funkcji w nieskończoności (przy $x \to \pm\infty$) nie różnią się istotnie, po odpowiednich modyfikacjach założeń, od odpowiednich stwierdzeń dotyczących granic przy x dążącym do skończonej granicy $x_0 \in \mathbb{R}$, nie będę więc przytaczał ich wszystkich w tym miejscu. (Zob. tekst **Teoria12**). I tak np. granica sumy funkcji przy $x \to \pm\infty$ równa jest sumie odpowiednich granic tych funkcji:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) + \lim_{x\to\pm\infty} g(x),$$

granica różnicy równa jest różnicy granic itd. Prawdziwe są także odpowiedniki twierdzeń o nierównościach dla granic, w tym twierdzenie "o trzech funkcjach" itd.

3. Pożyteczne wzory

Warto pamiętać, że

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

dla każdej liczby rzeczywistej $r > 0$.

(Np. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$, itd.)

Także

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

i podobnie, . $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$, itd.

Także

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

dla każdej liczby rzeczywistej $a > 1$.

Natomiast dla liczb rzeczywistych a takich, że $0 < a < 1$, jest "odwrotnie":

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty.$$

Teoria 14: Pochodna funkcji

1. Definicje

DEFINICJA 1. *Dana jest liczba rzeczywista* $x_0 \in \mathbb{R}$ *i funkcja* $f : x \to f(x)$ *określona w otoczeniu* $(x_0 - r, x_0 + r)$ *punktu* x_0 *(gdzie* $r > 0$*).*

Jeżeli istnieje granica

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{1}$$

to nazywamy ją ***pochodną funkcji*** f ***w punkcie*** x_0.

Mówimy, że funkcja f *jest* ***różniczkowalna*** *w punkcie* x_0.

DEFINICJA 2. *Dana jest liczba rzeczywista* $x_0 \in \mathbb{R}$ *i funkcja* $f : x \to f(x)$ *określona w przedziale* $\langle x_0, x_0 + r)$ *(gdzie* $r > 0$*).*

Jeżeli istnieje granica prawostronna

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

to nazywamy ją ***pochodną prawostronną funkcji*** f ***w punkcie*** x_0.

DEFINICJA 3. *Dana jest liczba rzeczywista* $x_0 \in \mathbb{R}$ *i funkcja* $f : x \to f(x)$ *określona w przedziale* $(x_0 - r, x_0\rangle$ *(gdzie* $r > 0$*).*

Jeżeli istnieje granica lewostronna

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

to nazywamy ją ***pochodną lewostronną funkcji*** f ***w punkcie*** x_0.

DEFINICJA 4. *Dana jest funkcja* $f : D \to \mathbb{R}$, $f : x \to f(x)$. *Niech* $A \subset D$ *będzie takim podzbiorem dziedziny funkcji* f, *że pochodna* $f'(x)$ *istnieje w każdym punkcie* $x \in A$. *Mówimy, że funkcja jest* ***różniczkowalna w zbiorze*** A, *zaś funkcję*

$$f' : A \to \mathbb{R}, \; f : x \to f'(x)$$

nazywamy ***pochodną funkcji*** f ***w zbiorze*** A.

Uwaga: Dziedzina pochodnej f' może się różnić od dziedziny samej funkcji f.

2. Główne twierdzenia

TWIERDZENIE 1. *Funkcja różniczkowalna w punkcie x_0 jest ciągła w tym punkcie (lecz niekoniecznie na odwrót).*

TWIERDZENIE 2. *Dana jest liczba rzeczywista $x_0 \in \mathbb{R}$ i funkcja $f : x \to f(x)$ określona w otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ punktu x_0 (gdzie $r > 0$).*

Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy obydwie pochodne jednostronne: $f'_+(x_0)$ oraz $f'_-(x_0)$ istnieją i są sobie równe. Zachodzi wtedy równość:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

TWIERDZENIE 3 (*o działaniach na funkcjach różniczkowalnych****).***

Dane są funkcje $f, g : A \to \mathbb{R}$, różniczkowalne w zbiorze A, i liczba $c \in \mathbb{R}$. Dla każdego $x \in A$ zachodzą równości:

$$[cf(x)]' = c \cdot f'(x), \tag{2}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x), \tag{3}$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x), \tag{4}$$

$$[f(x)\, g(x)]' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x). \tag{5}$$

Dla każdego $x \in A$ takiego, że $g(x) \neq 0$ zachodzi równość:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}. \tag{6}$$

Teoria 15: Pochodne funkcji elementarnych

TABELKA POCHODNYCH FUNKCJI ELEMENTARNYCH

(1) $(c)' = 0$ (c - stała)
(2) $(x)' = 1$
(3) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
(4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
(5) $(x^a)' = ax^{a-1}$
(6) $(\sin x)' = \cos x$
(7) $(\cos x)' = -\sin x$
(8) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
(9) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Teoria 16: Styczne do wykresu funkcji

Dana jest funkcja $f : A \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x)$, i punkt $x_0 \in A$.

DEFINICJA 1. *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to prostą o równaniu*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{1}$$

*nazywamy **styczną** do wykresu funkcji f w punkcie $P = (x_0, f(x_0))$ (inaczej: w punkcie o odciętej x_0).*

UWAGA: Kąt α, pod którym styczna przecina oś Ox spełnia warunek:

$$tg\alpha = f'(x_0). \tag{2}$$

DEFINICJA 2.

(a) Jeżeli istnieje pochodna prawostronna $f'_+(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0, to półprostą o równaniu

$$y = f'_+(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \qquad x \geq x_0$$

*nazywamy **styczną prawostronną** do wykresu funkcji f w punkcie $P = (x_0, f(x_0))$.*

(b) Jeżeli istnieje pochodna lewostronna $f'_-(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0, to półprostą o równaniu

$$y = f'_-(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \qquad x \leq x_0$$

*nazywamy **styczną lewostronną** do wykresu funkcji f w punkcie $P = (x_0, f(x_0))$.*

Teoria 17. Zagadnienia optymalizacyjne - pojęcia wstępne

Niech $f : D \to \mathbb{R}$ (gdzie $D \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem niepustym) będzie dowolną funkcją. Niech $x_0 \in D$. Dla każdej liczby $r > 0$ symbolem D_r oznaczymy zbiór tych wszystkich liczb x z dziedziny D funkcji f, które należą do otoczenia $(x_0 - r, x_0 + r)$ punktu x_0, czyli $D_r = D \cap (x_0 - r, x_0 + r)$.

Jeżeli istnieje taka liczba $r > 0$, że dla każdego $x \in D_r$ zachodzi nierówność: $f(x) \leq f(x_0)$, to mówimy, że w punkcie x_0 funkcja f ma **maksimum lokalne,** równe $f(x_0)$.

Jeżeli zaś dla każdego $x \in D_r$ takiego, że $x \neq x_0$, zachodzi nierówność: $f(x) < f(x_0)$, to mówimy, że w punkcie x_0 funkcja f ma **maksimum lokalne właściwe (**lub **ścisłe),** równe $f(x_0)$.

JJeżeli istnieje taka liczba $r > 0$, że dla każdego $x \in D_r$ zachodzi nierówność: $f(x) \geq f(x_0)$, to mówimy, że w punkcie x_0 funkcja f ma **minimum lokalne,** równe $f(x_0)$.

Jeżeli zaś dla każdego $x \in D_r$ takiego, że $x \neq x_0$, zachodzi nierówność: $f(x) > f(x_0)$, to mówimy, że w punkcie x_0 funkcja f ma **minimum lokalne właściwe (**lub **ścisłe),** równe $f(x_0)$.

Maksima i minima lokalne obejmujemy wspólną nazwą **ekstremów lokalnych** funkcji.

Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ (gdzie $a < b$) będzie dowolną funkcją określoną w przedziale (a, b).

Jeżeli dla dowolnych liczb $x_1, x_2 \in (a, b)$ takich, że $x_1 < x_2$ prawdziwa jest nierówność: $f(x_1) \leq f(x_2)$, to mówimy, że funkcja f jest funkcją **słabo rosnącą** (lub **niemalejącą**) w przedziale (a, b).

Jeżeli zaś dla dowolnych liczb $x_1, x_2 \in (a, b)$ takich, że $x_1 < x_2$ prawdziwa jest nierówność: $f(x_1) < f(x_2)$, to mówimy, że funkcja f jest funkcją **rosnącą** w przedziale (a, b).

Jeżeli dla dowolnych liczb $x_1, x_2 \in (a, b)$ takich, że $x_1 < x_2$ prawdziwa jest nierówność: $f(x_1) \geq f(x_2)$, to mówimy, że funkcja f jest funkcją **słabo malejącą** (lub **nierosnącą**) w przedziale (a, b).

Jeżeli zaś dla dowolnych liczb $x_1, x_2 \in (a, b)$ takich, że $x_1 < x_2$ prawdziwa jest nierówność: $f(x_1) > f(x_2)$, to mówimy, że funkcja f jest funkcją **malejącą** w przedziale (a, b).

Funkcję spełniającą którykolwiek z podanych powyżej warunków nazywamy **funkcją monotoniczną** w przedziale (a, b).

Teoria 18. Zagadnienia optymalizacyjne - twierdzenia

Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ (gdzie $a < b$) będzie dowolną funkcją różniczkowalną w przedziale (a,b).. Jeżeli $f'(x_0) = 0$, to mówimy, że punkt x_0 jest **punktem stacjonarnym** funkcji f.

TWIERDZENIE 1. *Dana jest funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ różniczkowalna w przedziale (a,b) i punkt $x_0 \in (a,b)$. Jeżeli funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0, to punkt ten jest punktem stacjonarnym, tj. $f'(x_0) = 0$.*

TWIERDZENIE 2 . *Dana jest funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ różniczkowalna w przedziale (a,b).*

(a) Jeżeli $f'(x) \geq 0$ dla wszystkich liczb $x \in (a,b)$, to funkcja f jest funkcją słabo rosnącą w przedziale (a,b).

(b) Jeżeli $f'(x) \leq 0$ dla wszystkich liczb $x \in (a,b)$, to funkcja f jest funkcją słabo malejącą w przedziale (a,b).

(c) Jeżeli $f'(x) = 0$ dla wszystkich liczb $x \in (a,b)$, to funkcja f jest funkcją stałą w przedziale (a,b).

(d) Jeżeli $f'(x) > 0$ dla wszystkich liczb $x \in (a,b)$, to funkcja f jest funkcją rosnącą w przedziale (a,b).

(e) Jeżeli $f'(x) < 0$ dla wszystkich liczb $x \in (a,b)$, to funkcja f jest funkcją malejącą w przedziale (a,b).

TWIERDZENIE 3 . *Dana jest funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ różniczkowalna w przedziale (a,b).*

(a) Jeżeli funkcja f jest funkcją słabo rosnącą (lub rosnącą) w przedziale (a,b), to $f'(x) \geq 0$ dla wszystkich liczb $x \in (a,b)$.

(b) Jeżeli funkcja f jest funkcją słabo malejącą (lub malejącą) w przedziale (a,b), to $f'(x) \leq 0$ dla wszystkich liczb $x \in (a,b)$.

(c) Jeżeli funkcja f jest funkcją stałą w przedziale (a,b), to $f'(x) = 0$ dla wszystkich liczb $x \in (a,b)$.

TWIERDZENIE 4 . *Dana jest funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ różniczkowalna w przedziale (a,b) i punkt stacjonarny $x_0 \in (a,b)$ (tak więc $f'(x_0) = 0$).*

(a) Jeżeli pochodna funkcji f w punkcie x_0 zmienia znak z dodatniego na ujemny, to funkcja f ma maksimum lokalne właściwe w punkcie x_0.

(b) Jeżeli pochodna funkcji f w punkcie x_0 zmienia znak z ujemnego na dodatni, to funkcja f ma minimum lokalne właściwe w punkcie x_0.

Teoria19: Wyznaczanie największej i najmniejszej wartości funkcji w przedziale domkniętym o skończonej długości

Spotyka się często zadanie następującej treści:

Dana jest funkcja $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, gdzie $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$ i różniczkowalna w przedziale (a, b). Należy wyznaczyć największą i najmniejszą wartość tej funkcji w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Opiszemy krótko metodę rozwiązywania tego typu zadania.

Jeżeli w jakimś punkcie $x_0 \in (a, b)$ funkcja f pprzyjmuje największą wartość, to w punkcie x_0 funkcja ta ma oczywiście maksimum lokalne, dlatego też x_0 musi być punktem stacjonarnym, czyli zachodzi równość: $f'(x_0) = 0$ (zob. tekst **Teoria18**, twierdzenie **1**).

Podobnie, jeżeli w jakimś punkcie punkcie $x_0 \in (a, b)$ funkcja f pprzyjmuje najmniejszą wartość, to w punkcie x_0 funkcja ta ma oczywiście minimum lokalne, dlatego też x_0 musi być punktem stacjonarnym, czyli zachodzi równość: $f'(x_0) = 0$ (zob. tekst **Teoria18**, twierdzenie **1**).

Możemy więc zacząć od wyznaczenia wszystkich punktów stacjonarnych zawartych w przedziale $\langle a, b \rangle$, czyli od rozwiązania równania:

$$f'(x) = 0, \qquad a \leq x \leq b.$$

Przypuśćmy, że zbiór

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

jest zbiorem wszystkich rozwiązań rozważanego równania (czyli zbiorem wszystkich punktów stacjonarnych) znajdujących się w przedziale $\langle a, b \rangle$. Znajdujemy teraz wartości funkcji we wszystkich tych punktach, czyli tworzymy zbiór

$$\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\}.$$

Funkcja f może oczywiście przyjmować największą wartość (a także najmniejszą wartość) w którymś z punktów końcowych $x = a$ lub $x = b$ przedziału, musimy więc dołączyć wartości funkcji w tych punktach, czyli utworzyć zbiór:

$$\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)\}. \tag{*}$$

Teraz sposród liczb należących do zbioru (*) wybieramy największą (jest ona największą wartością funkcji f w przedziale $\langle a, b \rangle$), a także liczbę najmniejszą (jest ona najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle a, b \rangle$).

Teoria20: Asymptoty

Asymptoty ułatwiają naszkicowanie wykresu danej funkcji.

Niech $f : D \to \mathbb{R}$ (gdzie $D \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem niepustym) będzie dowolną funkcją. Niech $c \in \mathbb{R}$ będzie dowolną liczbą.

Jeżeli spełniony jest którykolwiek z warunków:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty,$$

to prostą (pionową) o równaniu

$$x = c$$

nazywamy **asymptotą pionową** wykresu funkcji f.

Niech $f : (d, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Jeżeli $a, b \in \mathbb{R}$ są liczbami takimi, że

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

to prostą o równaniu

$$y = ax + b$$

nazywamy **asymptotą ukośną prawostronną** wykresu funkcji f.

(W szczególnym przypadku, gdy $a = 0$, mówimy o asymptocie poziomej prawostronnej).

Niech $f : (-\infty, d) \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Jeżeli $a, b \in \mathbb{R}$ są liczbami takimi, że

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

to prostą o równaniu

$$y = ax + b$$

nazywamy **asymptotą ukośną lewostronną** wykresu funkcji f.

(W szczególnym przypadku, gdy $a = 0$, mówimy o asymptocie poziomej lewostronnej).

(Bywa czasami tak, że asymptota lewostronna jest jednocześnie prawostronną. Lecz, oczywiście, nie musi zawsze tak być).

TWIERDZENIE 1. *Dana jest funkcja $f : (m, +\infty) \to \mathbb{R}$. Jeżeli istnieją granice*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b,$$

to prosta o równaniu: $y = ax + b$ *jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji* f.

TWIERDZENIE 2. *Dana jest funkcja* $f : (-\infty, m) \to \mathbb{R}$. *Jeżeli istnieją granice*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \qquad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = b,$$

to prosta o równaniu: $y = ax + b$ *jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji* f.