CIĄGI - przykłady i zadania

klasa II 2018/19

Adam Stachura

Zadania1. Ciągi

Zadanie 1. Napisać cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}$, gdzie $a_n = \dfrac{n+5}{2n+1}$.

Zadanie 2. Dany jest ciąg (a_n), $n \in \mathbb{N}$, gdzie $a_n = 5^{n-1}$. Obliczyć a_{2n}, a_{n+1} oraz a_{3k-1}, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3. Napisać cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}$, gdzie

$$a_1 = -3, \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}.$$

Zadanie 4. Napisać pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_0$, gdzie

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Zadanie 5. Zbadać monotoniczność ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}$, gdzie $a_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.

Zadanie 6. Zbadać ograniczoność ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}$, gdzie $a_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.

Zadanie 7. Zbadać ograniczoność ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}$, gdzie $a_n = 12 + n - n^2$.

Zadanie 8. Które wyrazy ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}$, są dodatnie, gdzie $a_n = \dfrac{n+5}{\frac{1}{2} - n}$?

Zadanie 9. Które wyrazy ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}$, są ujemne, gdzie $a_n = n^2 - 10$?

Zadanie 10*. Zbadać monotoniczność ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}$, gdzie $a_n = \dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$.

Zadanie 11*. Zbadać ograniczoność ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}$, gdzie $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Zadanie 12*. Ile wyrazów ciagu (a_n), $n \in \mathbb{N}$, gdzie $a_n = \dfrac{n+26}{n+2}$, to liczby naturalne?

Zadanie 13*. Napisać pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) , $n \in \mathbb{N}_0$, gdzie

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

(porównać z **zadaniem 4**).

Zadania 2. Ciąg arytmetyczny

Zadanie 1. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = -5$, $a_7 = -21$. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a_{10}.

Zadanie 2. O ciągu arytmetycznym (a_n) wiadomo, że $a_1 + a_4 = -6$, $a_3 + a_8 = -30$. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a_9.

Zadanie 3. Liczby 3, $a + 6$, 9 w podanej kolejności są pierwszym, drugim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a.

Zadanie 4. Obliczyć sumę A wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1.

Zadania 2. Ciąg arytmetyczny. Rozwiązania

Zadanie 1. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = -5$, $a_7 = -21$. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a_{10}.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \tag{*}$$

wynika, że $a_3 = a_1 + 2r$, $a_7 = a_1 + 6r$ (gdzie r oznacza różnicę ciągu). Skoro zaś $a_3 = -5$, $a_7 = -21$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + 2r = -5, \\ a_1 + 6r = -21. \end{cases}$$

Z pierwszego równania wynika, że $a_1 = -5 - 2r$, a gdy to podstawimy do drugiego równania, otrzymujemy równość:

$$-5 - 2r + 6r = -21,$$

z której wynika, że $r = -4$, no i

$$a_1 = -5 - 2 \cdot (-4) = 3.$$

Wobec tego $a_n = 3 - 4\,(n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_{10} = 3 - 4 \cdot (10 - 1) = -33.$$

Odpowiedź: $a_n = 3 - 4\,(n-1)\,,\ a_{10} = -33.$

(Można jeszcze wykonać sprawdzenie, o ile czas pozwoli. Skoro $a_1 = 3$ i $r = -4$, kolejny wyraz ciągu otrzymujemy odejmując od poprzedniego 4, tak że

$$(a_n) = (3, -1, \mathbf{-5}, -9, -13, -17, \mathbf{-21}, -25, -29, \mathbf{-33}, \ldots)$$

Wytłuszczonym drukiem wyróżniono trzeci, siódmy i dziesiąty wyraz ciągu.)

Zadanie 2. O ciągu arytmetycznym (a_n) wiadomo, że $a_1 + a_4 = -6$, $a_3 + a_8 = -30$. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a_9.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r \tag{*}$$

wynika, że $a_4 = a_1 + 3r$, $a_3 = a_1 + 2r$, $a_8 = a_1 + 7r$ (gdzie r oznacza różnicę ciągu). Skoro zaś $a_1 + a_4 = -6$, $a_3 + a_8 = -30$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 3r = -6, \\ a_1 + 2r + a_1 + 7r = -30, \end{cases}$$

lub po uproszczeniu:

$$\begin{cases} 2a_1 + 3r = -6, \\ 2a_1 + 9r = -30. \end{cases}$$

Odejmując (stronami) od drugiego równania pierwsze otrzymujemy: $6r = -24$, zatem $r = -4$. Podstawiając to do np. pierwszego równania otrzymujemy równość:

$$2a_1 + 3 \cdot (-4) = -6,$$

z której wynika, że $a_1 = 3$.

Wobec tego $a_n = 3 - 4\,(n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_9 = 3 - 4 \cdot (9-1) = -29.$$

Odpowiedź: $a_n = 3 - 4\,(n-1)\,$, $a_9 = -29$.

(Można jeszcze wykonać sprawdzenie, o ile czas pozwoli. Skoro $a_1 = 3$ i $r = -4$, kolejny wyraz ciągu otrzymujemy odejmując od poprzedniego 4, tak że

$$(a_n) = (\mathbf{3}, -1, \mathbf{-5}, \mathbf{-9}, -13, -17, -21, \mathbf{-25}, \mathbf{-29}, ...)$$

Tym razem wytłuszczonym drukiem wyróżniono pierwszy, czwarty, trzeci, ósmy i dziewiąty wyraz ciągu.)

Zadanie 3. Liczby 3, $a+6$, 9 w podanej kolejności są pierwszym, drugim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Zapisać wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu i obliczyć a.

Rozwiązanie. Niech (a_n) będzie tym ciągiem arytmetycznym, o który chodzi w zadaniu. Ogólny wzór na jego n-ty wyraz ma postać:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r, \tag{*}$$

i wiemy, że $a_1 = 3$. Wiemy też, że $a_5 = 9$, a z drugiej strony ze wzoru (*) mamy:

$$a_5 = a_1 + (5-1)\,r = 3 + 4r.$$

Otrzymujemy więc równość: $3 + 4r = 9$, a stąd $r = \frac{3}{2}$.

Wobec tego $a_n = 3 + \frac{3}{2}\,(n-1)$ (wstawiamy a_1 i r do wzoru (*)) i mamy:

$$a_2 = 3 + \frac{3}{2}\,(2-1) = \frac{9}{2},$$

a z drugiej strony podano w zadaniu, że $a_2 = a + 6$.Zatem $a + 6 = \frac{9}{2}$, więc $a = -\frac{3}{2}$.

Odpowiedź: $a_n = 3 + \frac{3}{2}\,(n-1)\,,\ a = -\frac{3}{2}$.

(Można jeszcze wykonać sprawdzenie, o ile czas pozwoli. Skoro $a_1 = 3$ i $r = \frac{3}{2}$, kolejny wyraz ciągu otrzymujemy dodając do poprzedniego $\frac{3}{2}$, tak że

$$(a_n) = \left(3, \frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}, 9, ...\right)$$

i oczywiście $-\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}$.)

Zadanie 4. Obliczyć sumę A wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1.

Rozwiązanie. Pierwszą taką liczbą jest $13 = 4 \cdot 3 + 1$, zaś ostatnią $97 = 4 \cdot 24 + 1$.

Jeżeli liczba naturalna x przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1, to da się ją zapisać w postaci: $x = 4k + 1$ (gdzie k jest liczbą naturalną). Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} x &= 4k + \mathbf{1}, \\ x+1 &= 4k + \mathbf{2}, \\ x+2 &= 4k + \mathbf{3}, \\ x+3 &= 4\,(k+1) + \mathbf{0}, \\ x+4 &= 4\,(k+1) + \mathbf{1} \end{aligned}$$

i tak dalej. Zatem kolejne reszty z dzielenia tych liczb przez 4 (zapisane wytłuszczoną czcionką) sa równe $1, 2, 3, 0, 1, ...$. Skoro więc liczba x daje przy dzieleniu przez 4 resztę 1, to następną taką liczbą jest $x + 4$, następną - $x + 8$ itd. Liczby, o które chodzi, tworzą więc ciąg arytmetyczny (skończony) o pierwszym wyrazie $a_1 = 13$ i o różnicy $r = 4:$

$$(a_n) = (13, 17, ..., 97)$$

i poszukiwana liczba A jest po prostu sumą wszystkich wyrazów tego ciągu.

Chcemy teraz skorzystać ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n. \tag{**}$$

Aby zeń skorzystać, musimy znać liczbę wyrazów w rozważanym ciągu, czyli liczbę n. Jest to łatwe zadanie, bo wiemy, że $a_n = 97$. Z ogólnego wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r \tag{*}$$

wynika równość:

$$97 = 13 + (n-1) \cdot 4,$$

a z niej otrzymujemy: $n = 22$.

Teraz wystarczy wstawić wszystkie dane do wzoru (**) i mamy:

$$A = S_{22} = \left(\frac{13 + 97}{2}\right) \cdot 22 = 110 \cdot 11 = 1210.$$

Odpowiedź: $A = 1210$.

Zadania 3. Ciąg geometryczny

Zadanie 1. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_2 = 2$, $a_6 = \frac{32}{81}$. Obliczyć iloraz q tego ciągu.

Zadanie 2. Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie -3 równa jest -61. Obliczyć pierwszy wyraz a_1 tego ciągu.

Zadanie 3. Liczby 2, $x + 12$, $-x$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Obliczyć x.

Zadania 3. Ciąg geometryczny. Rozwiązania

Zadanie 1. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_2 = 2$, $a_6 = \frac{32}{81}$. Obliczyć iloraz q tego ciągu.

Rozwiązanie. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{***}$$

wynika, że $a_2 = a_1 q$, $a_6 = a_1 q^5$ (gdzie q oznacza iloraz ciągu). Skoro zaś $a_2 = 2$, $a_6 = \frac{32}{81}$, to mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 q = 2, \\ a_1 q^5 = \frac{32}{81}. \end{cases}$$

Pisząc drugie równanie w postaci: $a_1 q \cdot q^4 = \frac{32}{81}$ i korzystając z pierwszego równania otrzymujemy kolejno równości

$$2q^4 = \frac{32}{81},$$

$$q^4 = \frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)^4,$$

tak więc

$$q = \frac{2}{3} \text{ lub } q = -\frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: Warunki podane w zadaniu spełniają dwa ciągi geometryczne o ilorazach, odpowiednio, $q' = \frac{2}{3}$ oraz $q'' = -\frac{2}{3}$.

(W celu sprawdzenia, o ile czas pozwoli, możemy wypisać obydwa ciągi. Dla $q' = \frac{2}{3}$ mamy $a_1 = 3$, bo $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$ i ciąg ma postać

$$(a_n) = \left(3, \mathbf{2}, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \mathbf{\frac{32}{81}}, \ldots\right),$$

zaś dla $q'' = -\frac{2}{3}$ mamy odpowiednio

$$(a_n) = \left(-3, \mathbf{2}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \mathbf{\frac{32}{81}}, \ldots\right).$$

Wytłuszczonym drukiem wyróżniono drugi i szósty wyraz ciągu.)

Zadanie 2. Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie -3 równa jest -61. Obliczyć pierwszy wyraz a_1 tego ciągu.

Rozwiązanie. Ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) \tag{****}$$

(prawdziwego w przypadku, gdy $q \neq 1$, a tak właśnie jest w tym zadaniu) i z danych zadania wynika, że

$$S_5 = a_1 \left[\frac{1-(-3)^5}{1-(-3)} \right].$$

Skoro zaś $S_5 = -61$, to mamy równanie:

$$a_1 \left[\frac{1-(-3)^5}{1-(-3)} \right] = -61,$$

czyli

$$a_1 \cdot \frac{244}{4} = -61,$$

zatem $a_1 = -1$.

Odpowiedź: $a_1 = -1$.

(W celu sprawdzenia, o ile czas pozwoli, można wypisać nasz ciąg. Skoro $a_1 = -1$ i $q = -3$, kolejny wyraz ciągu otrzymujemy mnożąc poprzedni przez -3, tak że

$$(a_n) = (-1, 3, -9, 27, -81, ...).$$

Dodajemy pierwsze pięć wyrazów i stwierdzamy, że suma rzeczywiście jest równa -61.)

Zadanie 3. Liczby 2, $x + 12$, $-x$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Obliczyć x.

Rozwiązanie. Po pierwsze zauważamy, że rozważany ciąg ma iloraz q różny od zera (gdyby było $q = 0$, to ciąg miałby postać: $(2, 0, 0)$, a nie istnieje taka liczba x, że $x + 12 = 0$ i $-x = 0$). Dla takiego ciągu można skorzystać ze znanego faktu, że kwadrat każdego wyrazu ciągu (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$(x+12)^2 = -2x,$$

które przekształcamy do postaci

$$x^2 + 26x + 144 = 0$$

i dalej,

$$(x+13)^2 - 169 + 144 = 0,$$

więc ostatecznie

$$(x+13)^2 = 25 = 5^2.$$

Zatem

$$x + 13 = 5 \text{ lub } x + 13 = -5,$$

i odpowiednio

$$x = -8 \text{ lub } x = -18.$$

Odpowiedź: $x = -8$ lub $x = -18$.

(W celu sprawdzenia, o ile czas pozwoli, można wypisać obydwa ciągi. Dla $x = -8$ otrzymujemy ciąg $(2, 4, 8)$, zaś dla $x = -18$ otrzymujemy ciąg $(2, -6, 18)$. Widać, że obydwa ciągi są geometryczne - pierwszy ma iloraz równy 2, zaś drugi ma iloraz równy -3. Tak więc zadanie ma dwa rozwiązania.)

***Uwaga**: W sytuacji takiej jak powyższa za pełne rozwiązanie uznaje się takie, w którym podane są **wszystkie** istniejące rozwiązania.*

Zadania 4. Ciąg arytmetyczny i geometryczny

Zadanie 1. Wyrazy pierwszy i trzeci rosnącego ciągu arytmetycznego są odpowiednio pierwszym i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Ich wspólny pierwszy wyraz jest równy 5, a drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest o 10 większy od drugiego wyrazu ciągu geometrycznego. Wyznaczyć te ciągi.

Zadania 4. Ciąg arytmetyczny i geometryczny. Rozwiązania

Zadanie 1. Wyrazy pierwszy i trzeci rosnącego ciągu arytmetycznego są odpowiednio pierwszym i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Ich wspólny pierwszy wyraz jest równy 5, a drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest o 10 większy od drugiego wyrazu ciągu geometrycznego. Wyznaczyć te ciągi.

Rozwiązanie. W zadaniu chodzi o skończone, trójwyrazowe ciągi o pierwszym wyrazie 5. Oznaczmy więc drugi i trzeci wyraz ciągu arytmetycznego symbolami x i y, odpowiednio. Z zadania wynika, że trzeci wyraz ciągu geometrycznego też jest równy y. Drugi wyraz tego ciągu oznaczymy przez z. Mamy więc następującą sytuację: $(5, x, y)$ - to ciąg arytmetyczny, zaś $(5, z, y)$ - to ciąg geometryczny i z zadania wiemy, że $x = z + 10$. Zatem $z = x - 10$.

Ciąg arytmetyczny wygląda więc tak oto:

$$(5, x, y)\,,$$

a ciąg geometryczny ma postać:

$$(5, x - 10, y)\,.$$

Upewniamy się teraz, że iloraz q ciągu geometrycznego jest różny od zera. Gdyby bowiem był on równy zeru, to ciąg miałby postać: $(5, 0, 0)$ i byłoby: $x = 10$, $y = 0$. Ale z kolei ciąg $(5, 10, 0)$ nie jest w ogóle ciągiem arytmetycznym. Zatem $q \neq 0$. Można więc skorzystać ze znanego faktu, że kwadrat każdego wyrazu ciągu geometrycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy iloczynowi wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$(x - 10)^2 = 5y.$$

Z kolei dla ciągu arytmetycznego można skorzystać z faktu, że każdy wyraz dowolnego ciągu arytmetycznego (poza pierwszym i, ewentualnie, ostatnim) jest równy średniej arytmetycznej wyrazów z nim sąsiadujących. Korzystając z tego faktu otrzymujemy równanie

$$x = \frac{5 + y}{2}.$$

Ostatecznie mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} (x - 10)^2 = 5y, \\ x = \dfrac{5 + y}{2}. \end{cases}$$

Drugie równanie przekształcamy do postaci: $2x = 5 + y$, stąd

$$y = 2x - 5. \tag{*****}$$

Wstawiając to do pierwszego równania otrzymujemy, kolejno, równości:

$$(x-10)^2 = 10x - 25,$$

$$x^2 - 20x + 100 = 10x - 25,$$
$$x^2 - 30x + 125 = 0,$$
$$(x-15)^2 - 225 + 125 = 0,$$
$$(x-15)^2 = 100,$$
$$x - 15 = 10 \text{ lub } x - 15 = -10$$

i, ostatecznie,

$$x = 25 \text{ lub } x = 5.$$

Mamy więc dwa rozwiązania: $x_1 = 25$, $x_2 = 5$. Ze wzoru na y (wzór (*****) otrzymujemy, odpowiednio, $y_1 = 45$, $y_2 = 5$. Ale ciąg $(5, x_2, y_2) = (5, 5, 5)$ jest co prawda ciągiem arytmetycznym, ale nie jest ciągiem rosnącym. Musimy zatem odrzucić drugie rozwiązanie i pozostać przy pierwszym: $(5, x_1, y_1) = (5, 25, 45)$. Pozostaje jeszcze wyznaczyć z z równości

$$z = x - 10 = 25 - 10 = 15.$$

Odpowiedź: Ciągiem arytmetycznym jest ciąg $(5, 25, 45)$, a ciągiem geometrycznym jest ciąg $(5, 15, 45)$.

(Sprawdzenie polega na zauważeniu, że pierwszy ciąg jest rosnącym ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 20$, a drugi ciąg jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = 3$, i drugi wyraz ciągu arytmetycznego rzeczywiście jest o 10 większy od drugiego wyrazu ciągu geometrycznego).

Zadania 5. Lokaty i kredyty

ZADANIE 1. Pan X wpłacił 20000 zł do banku na czteroletnią lokatę oprocentowaną w wysokości 8% rocznie. Odsetki dopisywane były do kapitału w końcu każdego półrocza (procent składany). W takim razie po czterech latach (nie uwzględniamy podatku od dochodów kapitałowych) miał na koncie kwotę (w zaokrągleniu do pełnych złotówek)
(A) 26371 zł.
(B) 27371 zł.
(C) 28371 zł.
(D) 29371 zł.

ZADANIE 2. Pan Y wplacił 10000 zł do banku na trzyletnią lokatę oprocentowaną w wysokości 10% rocznie. Odsetki dopisywane były do kapitału w końcu każdego roku (procent składany). Uwzględniamy 18%-wy podatek od dochodów kapitałowych. W takim razie po trzech latach pan Y miał na koncie kwotę (w zaokrągleniu do pełnych złotówek)
(A) 12367 zł.
(B) 12667 zł.
(C) 12967 zł.
(D) 13367 zł.

ZADANIE 3. Pan N ulokował na trzydziestomiesięcznej lokacie bankowej kwotę 8400 zł. Oprocentowanie lokaty wynosi 7% w skali roku (procent prosty). Wobec tego (nie uwzględniamy podatku od dochodów kapitałowych) po trzydziestu miesiącach pan N otrzyma z lokaty
(A) 9870 zł.
(B) 9890 zł.
(C) 9910 zł.

ZADANIE 4. Pani M ulokowała na pięcioletniej lokacie bankowej kwotę 7500 zł. Oprocentowanie lokaty wynosi 6% w skali roku (procent prosty). Uwzględniamy 18%-wy podatek od dochodów kapitałowych. Wobec tego po pięciu latach na koncie pani M znajdzie się kwota
(A) 9325 zł.
(B) 9335 zł.
(C) 9345 zł.

ZADANIE 5. Niejaki X wplacił pewną kwotę do banku na dwuletnią lokatę oprocentowaną w wysokości 6% rocznie. Odsetki dopisywane były do kapitału w końcu każdego półrocza (procent składany). Jeżeli po dwóch latach miał na koncie kwotę $15757,12$ zł (nie uwzględniamy podatku od dochodów kapitałowych), to to oznacza, że wpłacił

(A) 13000 zł.
(B) 13500 zł.
(C) 14000 zł.
(D) 14500 zł.

ZADANIE 6. Jaś i Małgosia otrzymali po 1500 zł rocznego stypendium dla zdolnej młodzieży. Oboje postanowili pieniądze zdeponować w banku na lokacie rocznej. Jaś wybrał bank, który oferował oprocentowanie w wysokości $4,2\%$ w stosunku rocznym i kapitalizację odsetek po zakończeniu każdego półrocza. Małgosia wybrała bank, w którym oprocentowanie wynosi 4% w stosunku rocznym, a kapitalizacja odsetek następuje po zakończeniu każdego kwartału. Które stwierdzenie jest prawdziwe (nie uwzględniamy podatku od dochodów kapitałowych):

(A) Korzystniejszego wyboru dokonał Jaś.
(B) Korzystniejszego wyboru dokonała Małgosia.
(C) Wybór obojga był równie korzystny.

ZADANIE 7. Firma F wzięła w banku kredyt w wysokości 200000 zł. Kredyt ma być spłacony w sześciu równych, kwartalnych ratach, a jego oprocentowanie wynosi 20% w stosunku rocznym. Zatem wysokość raty (w zaokrągleniu do całych złotówek) wynosi

(A) 38803 zł.
(B) 39003 zł.
(C) 39203 zł.
(D) 39403 zł.

ZADANIE 8. Pani Y wzięła w banku kredyt w wysokości 32000 zł. Kredyt ma być spłacony w ciągu dwóch lat w kwartalnych ratach malejących, a jego oprocentowanie wynosi 16% w skali roku. Zatem wysokość ostatniej raty wynosi

(A) 4140 zł.
(B) 4160 zł.
(C) 4180 zł.
(D) 4200 zł.

Zadania 5. Lokaty i kredyty. Rozwiązania

ZADANIE 1. Pan X wpłacił 20000 zł do banku na czteroletnią lokatę oprocentowaną w wysokości 8% rocznie. Odsetki dopisywane były do kapitału w końcu każdego półrocza (procent składany). W takim razie po czterech latach (nie uwzględniamy podatku od dochodów kapitałowych) miał na koncie kwotę (w zaokrągleniu do pełnych złotówek)

(A) 26371 zł.
(B) 27371 zł.
(C) 28371 zł.
(D) 29371 zł.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (3) z tekstu **Teoria4**. Dane są następujące:
$K = 20000$,
$p = 8$,
$l = 4$,
$m = 2$ (w roku mieszczą się dwa półrocza),
$n = 8$ (bo $n = ml$).
Szukamy kapitału końcowego K_n. Wzór (3) przyjmuje postać:

$$K_n = 20000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100 \cdot 2}\right)^8,$$

czyli

$$K_n = 20000 \cdot (1,04)^8,$$

i wykonując wskazane obliczenia znajdujemy: $K_n \approx 27371$.

Odpowiedź: Wybieram **(B)**.

ZADANIE 2. Pan Y wplacił 10000 zł do banku na trzyletnią lokatę oprocentowaną w wysokości 10% rocznie. Odsetki dopisywane były do kapitału w końcu każdego roku (procent składany). Uwzględniamy 18%-wy podatek od dochodów kapitałowych. W takim razie po trzech latach pan Y miał na koncie kwotę (w zaokrągleniu do pełnych złotówek)

(A) 12367 zł.
(B) 12667 zł.
(C) 12967 zł.

(D) 13367 zł.

Rozwiązanie. Mamy następujące dane:
$K = 10000$,
$p = 10$,
$l = 3$,
$m = 1$ (w roku mieści się jeden rok),
$n = 3$ (bo $n = ml$).

Szukamy kapitału końcowego K_n. Należy zastosować wzór (3) z tekstu **Teoria4**, ale ponieważ uwzględniamy 18%-wy podatek od dochodów kapitałowych, więc zgodnie z tym, co napisano w tekście **Teoria4**, wzór (5), należy zastąpić p przez

$$p' = p - \frac{18}{100}p,$$

czyli przez

$$p' = 10 - \frac{18}{100} \cdot 10 = 8,2.$$

Wzór (3) przyjmuje teraz postać:

$$K_n = 10000 \cdot \left(1 + \frac{8,2}{100 \cdot 1}\right)^3,$$

czyli

$$K_n = 10000 \cdot (1,082)^3,$$

i wykonując wskazane obliczenia znajdujemy: $K_n \approx 12667$.

Odpowiedź: Wybieram **(B)**.

ZADANIE 3. Pan N ulokował na trzydziestomiesięcznej lokacie bankowej kwotę 8400 zł. Oprocentowanie lokaty wynosi 7% w skali roku (procent prosty). Wobec tego (nie uwzględniamy podatku od dochodów kapitałowych) po trzydziestu miesiącach pan N otrzyma z lokaty

(A) 9870 zł.
(B) 9890 zł.
(C) 9910 zł.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (2) z tekstu **Teoria4**. Dane są następujące:
$K = 8400$,
$p = 7$,

$l = 2,5$ (trzydzieści miesięcy to dwa i pół roku).

Szukamy kapitału końcowego K_n. Wzór (2) przyjmuje postać:

$$K_n = 8400 + \frac{8400 \cdot 7 \cdot 2,5}{100},$$

czyli

$$K_n = 8400 + 84 \cdot 7 \cdot 2,5$$

i wykonując wskazane obliczenia znajdujemy: $K_n = 9870$.

Odpowiedź: Wybieram **(A)**.

ZADANIE 4. Pani M ulokowała na pięcioletniej lokacie bankowej kwotę 7500 zł. Oprocentowanie lokaty wynosi 6% w skali roku (procent prosty). Uwzględniamy 18%-wy podatek od dochodów kapitałowych. Wobec tego po pięciu latach na koncie pani M znajdzie się kwota

(A) 9325 zł.
(B) 9335 zł.
(C) 9345 zł.

Rozwiązanie. Mamy następujące dane:
$K = 7500$,
$p = 6$,
$l = 5$.

Szukamy kapitału końcowego K_n. Należy zastosować wzór (2) z tekstu **Teoria4**, ale ponieważ uwzględniamy 18%-wy podatek od dochodów kapitałowych, więc zgodnie z tym, co napisano w tekście **Teoria4**, wzór (5), należy zastąpić p przez

$$p' = p - \frac{18}{100}p,$$

czyli przez

$$p' = 6 - \frac{18}{100} \cdot 6 = 4,92.$$

Wzór (2) przyjmuje teraz postać:

$$K_n = 7500 + \frac{7500 \cdot 4,92 \cdot 5}{100},$$

czyli

$$K_n = 7500 + 75 \cdot 4.92 \cdot 5$$

i wykonując wskazane obliczenia znajdujemy: $K_n = 9345$.

Odpowiedź: Wybieram **(C)**.

ZADANIE 5. Niejaki X wplacił pewną kwotę do banku na dwuletnią lokatę oprocentowaną w wysokości 6% rocznie. Odsetki dopisywane były do kapitału w końcu każdego półrocza (procent składany). Jeżeli po dwóch latach miał na koncie kwotę $15757,12$ zł (nie uwzględniamy podatku od dochodów kapitałowych), to to oznacza, że wpłacił
(A) 13000 zł.
(B) 13500 zł.
(C) 14000 zł.
(D) 14500 zł.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (3) z tekstu **Teoria4**. Dane są następujące:
$p = 6$,
$l = 2$,
$m = 2$ (w roku mieszczą się dwa półrocza),
$n = 4$ (bo $n = ml$),
$K_n = 15757,12$.
Szukamy kapitału początkowego K. Wzór (3) przyjmuje postać:

$$15757,12 = K \cdot \left(1 + \frac{6}{100 \cdot 2}\right)^4,$$

czyli

$$15757,12 = K \cdot (1,03)^4,$$

zatem

$$K = \frac{15757,12}{(1,03)^4}$$

i wykonując wskazane obliczenia znajdujemy: $K \approx 14000$ (dokładniej: $K = 13999,9970325$, co oczywiście spowodowane jest błędem zaokrągleń popełnionych przy wyznaczaniu kwoty K_n). Możemy śmiało przyjąć, że $K = 14000$.

Odpowiedź: Wybieram **(C)**.

ZADANIE 6. Jaś i Małgosia otrzymali po 1500 zł rocznego stypendium dla zdolnej młodzieży. Oboje postanowili pieniądze zdeponować w banku na lokacie rocznej. Jaś wybrał bank, który oferował oprocentowanie w wysokości $4,2\%$ w stosunku rocznym i kapitalizację odsetek po zakończeniu każdego półrocza. Małgosia wybrała bank, w którym oprocentowanie wynosi 4% w stosunku rocznym, a kapitalizacja odsetek następuje po zakończeniu każdego kwartału. Które stwierdzenie jest prawdziwe (nie uwzględniamy podatku od dochodów kapitałowych):

(A) Korzystniejszego wyboru dokonał Jaś.
(B) Korzystniejszego wyboru dokonała Małgosia.
(C) Wybór obojga był równie korzystny.

Rozwiązanie. W celu wyznaczenia kapitału końcowego K_{nJ}na lokacie Jasia stosujemy wzór (3) z tekstu **Teoria4** z następującymi danymi:
$K = 1500$,
$p = 4,2$,
$l = 1$,
$m = 2$ (w roku mieszczą się dwa półrocza),
$n = 2$ (bo $n = ml$).
Wzór (3) przyjmuje postać:

$$K_{nJ} = 1500 \cdot \left(1 + \frac{4,2}{100 \cdot 2}\right)^2,$$

czyli

$$K_{nJ} = 1500 \cdot (1,021)^2,$$

i wykonując wskazane obliczenia znajdujemy:

$$K_{nJ} = 1563,6615,$$

zatem na koncie Jasia po roku znajdzie się kwota 1563 zł 66 gr (w zaokrągleniu).

W celu wyznaczenia kapitału końcowego K_{nM} na lokacie Małgosi stosujemy wzór (3) z tekstu **Teoria4** z następującymi danymi:
$K = 1500$,
$p = 4$,
$l = 1$,
$m = 4$ (w roku mieszczą się cztery kwartały),
$n = 4$ (bo $n = ml$).
Wzór (3) przyjmuje postać:

$$K_{nM} = 1500 \cdot \left(1 + \frac{4}{100 \cdot 4}\right)^4,$$

czyli

$$K_{nM} = 1500 \cdot (1,01)^4,$$

i wykonując wskazane obliczenia znajdujemy:

$$K_{nM} = 1560,906015,$$

zatem na koncie Małgosi po roku znajdzie się kwota 1560 zł 91 gr (w zaokrągleniu). Stąd

Odpowiedź: Wybieram **(A)**.

ZADANIE 7. Firma F wzięła w banku kredyt w wysokości 200000 zł. Kredyt ma być spłacony w sześciu równych, kwartalnych ratach, a jego oprocentowanie wynosi 20% w stosunku rocznym. Zatem wysokość raty (w zaokrągleniu do całych złotówek) wynosi
(A) 38803 zł.
(B) 39003 zł.
(C) 39203 zł.
(D) 39403 zł.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (1) z tekstu **Teoria5** Dane są następujące:
$K = 200000$,
$p = 20$,
$l = 1,5$ (sześć kwartałów to jeden i pół roku),
$m = 4$ (rok liczy cztery kwartały),
$n = 6$ (jest sześć rat do spłacenia).
Szukamy wysokości R raty. Wzór (1) przyjmuje postać:

$$R = \frac{200000}{\left(\frac{1}{1+\frac{20}{100\cdot 4}}\right) + \left(\frac{1}{1+\frac{20}{100\cdot 4}}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+\frac{20}{100\cdot 4}}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+\frac{20}{100\cdot 4}}\right)^4 + \left(\frac{1}{1+\frac{20}{100\cdot 4}}\right)^5 + \left(\frac{1}{1+\frac{20}{100\cdot 4}}\right)^6},$$

czyli

$$R = \frac{200000}{\left(\frac{20}{21}\right) + \left(\frac{20}{21}\right)^2 + \left(\frac{20}{21}\right)^3 + \left(\frac{20}{21}\right)^4 + \left(\frac{20}{21}\right)^5 + \left(\frac{20}{21}\right)^6},$$

i wykonując wskazane obliczenia znajdujemy: $R \approx 39403$.

Odpowiedź: Wybieram **(D)**.

ZADANIE 8. Pani Y wzięła w banku kredyt w wysokości 32000 zł. Kredyt ma być spłacony w ciągu dwóch lat w kwartalnych ratach malejących, a jego oprocentowanie wynosi 16% w skali roku. Zatem wysokość ostatniej raty wynosi

(A) 4140 zł.
(B) 4160 zł.
(C) 4180 zł.
(D) 4200 zł.

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (2) z tekstu **Teoria5**. Dane są następujące:
$K = 32000$,
$p = 16$,
$l = 2$,
$m = 4$ (rok liczy cztery kwartały),
$n = 8$ (bo $n = ml$).
Szukamy wysokości R_8 ostatniej, a więc ósmej raty. Wzór (2) przyjmuje postać:

$$R_8 = \frac{32000}{8} + \frac{16}{100 \cdot 4}\left(32000 - \frac{7}{8} \cdot 32000\right),$$

i wykonując wskazane obliczenia znajdujemy: $R_8 = 4160$.

Odpowiedź: Wybieram **(B)**.

Zadania 6. Granice ciągów

ZADANIE 1. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \frac{n^3 - 2n^2 + 5}{\frac{1}{2}n^3 + 4n^2 + n}.$$

ZADANIE 2. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \frac{(\sqrt{n} - 1)(\sqrt{n} + 1)}{(2\sqrt{n} + 3)^2}.$$

ZADANIE 3. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \left(5 + \frac{3}{n^2}\right)\left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

ZADANIE 4. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \frac{3n - \sqrt{n} + 4}{\sqrt{4n^2 + 1} + 5n}.$$

ZADANIE 5. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \frac{(2 \cdot 3^n - 1)^2}{(3^n + 2^n)^2}.$$

ZADANIE 6. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \sqrt[n]{5^n + 4 \cdot 2^n + 7}.$$

ZADANIE 7. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \sqrt{n^2 + 1}.$$

ZADANIE 8. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \sqrt{n^2 + 2n} + n.$$

ZADANIE 9. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_2$, gdzie

$$a_n = \sqrt{n^2 - 2n}.$$

ZADANIE 10. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \frac{3n^4 - 2n^5 - 3n^6}{n^4 + 3n^3 - 5n^2 - 3}.$$

ZADANIE 11. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \frac{3 \cdot 2^n + 6 \cdot 5^n}{2 \cdot 3^n - 2^n}.$$

Zadania 6. Granice ciągów. Rozwiązania

ZADANIE 1. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \frac{n^3 - 2n^2 + 5}{\frac{1}{2}n^3 + 4n^2 + n}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Dzieląc licznik i mianownik we wzorze (1) przez n w potędze o najwyższym wykładniku spośród występujących w mianowniku, czyli przez n^3, i korzystając z twierdzenia o działaniach na ciągach zbieżnych (zob. tekst **Teoria6**) otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3 - 2n^2 + 5}{\frac{1}{2}n^3 + 4n^2 + n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n^3}{n^3} - \frac{2n^2}{n^3} + \frac{5}{n^3}}{\frac{\frac{1}{2}n^3}{n^3} + \frac{4n^2}{n^3} + \frac{n}{n^3}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^3}}{\frac{1}{2} + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}\right) =$$

$$= \frac{1 - 0 + 0}{\frac{1}{2} + 0 + 0} = 2,$$

ponieważ

$$\frac{2}{n} \to 0, \quad \frac{5}{n^3} \to 0, \quad \frac{4}{n} \to 0, \quad \frac{1}{n^2} \to 0.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

ZADANIE 2. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \frac{(\sqrt{n} - 1)(\sqrt{n} + 1)}{(2\sqrt{n} + 3)^2}.$$

Rozwiązanie. Mamy:

$$a_n = \frac{n - 1}{4n + 12\sqrt{n} + 9}. \tag{2}$$

Dzieląc licznik i mianownik we wzorze (2) przez n w potędze o najwyższym wykładniku spośród występujących w mianowniku, czyli przez n, i korzystając z twierdzenia o działaniach na ciągach zbieżnych (zob. tekst **Teoria6**) otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n - 1}{4n + 12\sqrt{n} + 9}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{4n}{n} + \frac{12\sqrt{n}}{n} + \frac{9}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{4 + \frac{12}{\sqrt{n}} + \frac{9}{n}}\right) =$$

$$= \frac{1-0}{4+0+0} = \frac{1}{4},$$

ponieważ

$$\frac{1}{n} \to 0, \qquad \frac{12}{\sqrt{n}} \to 0, \qquad \frac{9}{n} \to 0.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$.

ZADANIE 3. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \left(5 + \frac{3}{n^2}\right)\left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Rozwiązanie. Korzystając z twierdzenia o działaniach na ciągach zbieżnych (zob. tekst **Teoria6**) otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(5 + \frac{3}{n^2}\right)\left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] = 5 \cdot 2 = 10,$$

ponieważ

$$\frac{3}{n^2} \to 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 10$.

ZADANIE 4. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \frac{3n - \sqrt{n} + 4}{\sqrt{4n^2+1} + 5n}. \tag{3}$$

Rozwiązanie. Dzieląc licznik i mianownik we wzorze (3) przez n i korzystając z twierdzenia o działaniach na ciągach zbieżnych (zob. tekst **Teoria6**) oraz z reguły włączania pod pierwiastek otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n - \sqrt{n} + 4}{\sqrt{4n^2+n} + 5n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3n}{n} - \frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{4}{n}}{\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n} + \frac{5n}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{4n^2+n}{n^2}} + 5}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{4}{n}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 5}\right) = \frac{3-0+0}{\sqrt{4+0}+5} = \frac{3}{7},$$

ponieważ

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \qquad \frac{4}{n} \to 0, \qquad \frac{1}{n} \to 0.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{7}$.

ZADANIE 5. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \frac{(2\cdot 3^n - 1)^2}{(3^n + 2^n)^2}.$$

Rozwiązanie. Mamy:

$$a_n = \frac{4\cdot 9^n - 4\cdot 3^n + 1}{9^n + 2\cdot 6^n + 4^n}. \tag{4}$$

Dzieląc licznik i mianownik we wzorze (4) przez potęgę liczby n o największej podstawie spośród występujących w mianowniku, czyli przez 9^n, i korzystając z twierdzenia o działaniach na ciągach zbieżnych (zob. tekst **Teoria6**) otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\cdot 9^n - 4\cdot 3^n + 1}{9^n + 2\cdot 6^n + 4^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{4\cdot 9^n}{9^n} - \frac{4\cdot 3^n}{9^n} + \frac{1}{9^n}}{\frac{9^n}{9^n} + \frac{2\cdot 6^n}{9^n} + \frac{4^n}{9^n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4 - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{9}\right)^n}{1 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n}\right) =$$

$$= \frac{4 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 4,$$

ponieważ

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0, \quad \left(\frac{1}{9}\right)^n \to 0, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0, \quad \left(\frac{4}{9}\right)^n \to 0.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

ZADANIE 6. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \sqrt[n]{5^n + 4\cdot 2^n + 7}.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_1$ zachodzą nierówności:

$$5^n \le 5^n + 4\cdot 2^n + 7 \le 5^n + 4\cdot 5^n + 7\cdot 5^n, \tag{5}$$

ponieważ $2^n \leq 5^n$ i $1 \leq 5^n$.

Z nierówności (5) otrzymujemy kolejno nierówności:

$$5^n \leq 5^n + 4 \cdot 2^n + 7 \leq 12 \cdot 5^n,$$

$$\sqrt[n]{5^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 4 \cdot 2^n + 7} \leq \sqrt[n]{12 \cdot 5^n},$$

$$5 \leq \sqrt[n]{5^n + 4 \cdot 2^n + 7} \leq \sqrt[n]{12} \cdot 5,$$

a ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{12} = 1$, więc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{12} \cdot 5 \right) = 1 \cdot 5 = 5.$$

Na mocy twierdzenia **3** (zob. tekst **Teoria7**) otrzymujemy:

$$5 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + 4 \cdot 2^n + 7} \leq 5,$$

co oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + 4 \cdot 2^n + 7} = 5.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

ZADANIE 7. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \sqrt{n^2 + 1}.$$

Rozwiązanie. Oczywiście mamy nierówność:

$$n^2 < n^2 + 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_1),$$

a w takim razie także

$$n = \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2 + 1},$$

czyli $n < a_n$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_1$.

Ponieważ wiemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, więc korzystając z twierdzenia **2** (zob. tekst **Teoria7**) stwierdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (granica niewłaściwa).

ZADANIE 8. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \sqrt{n^2 + 2n} + n.$$

Rozwiązanie. Oczywiście mamy nierówność:

$$n^2 < n^2 + 2n \qquad (n \in \mathbb{N}_1),$$

a w takim razie także

$$n = \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2 + 2n}$$

i dalej,

$$n + n < \sqrt{n^2 + 2n} + n,$$

czyli $2n < a_n$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_1$.

Ponieważ wiemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = +\infty$, więc korzystając z twierdzenia **2** (zob. tekst **Teoria7**) stwierdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (granica niewłaściwa).

ZADANIE 9. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_2$, gdzie

$$a_n = \sqrt{n^2 - 2n}.$$

Rozwiązanie. Wzór na n-ty wyraz ciągu przekształcimy w następujący sposób:

$$a_n = \sqrt{n^2 - 2n} = \sqrt{n^2\left(1 - \frac{2}{n}\right)} = n\sqrt{1 - \frac{2}{n}}.$$

Korzystając z twierdzenia o działaniach na ciągach zbieżnych (zob. tekst **Teoria6**) oraz z twierdzenia o działaniach na ciągach rozbieżnych (zob. tekst **Teoria8**) otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{n}}\right) = +\infty,$$

ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty,$$

natomiast

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1 - \frac{2}{n}}\right) = \sqrt{1 - 0} = 1,$$

gdyż

$$\frac{2}{n} \to 0.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (granica niewłaściwa).

ZADANIE 10. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \frac{3n^4 - 2n^5 - 3n^6}{n^4 + 3n^3 - 5n^2 - 3}. \tag{6}$$

Rozwiązanie. Dzieląc licznik i mianownik we wzorze (6) przez n w potędze o najwyższym wykładniku sposród występujących w mianowniku, czyli przez n^4, otrzymujemy:

$$\frac{3n^4 - 2n^5 - 3n^6}{n^4 + 3n^3 - 5n^2 - 3} = \frac{\frac{3n^4}{n^4} - \frac{2n^5}{n^4} - \frac{3n^6}{n^4}}{\frac{n^4}{n^4} + \frac{3n^3}{n^4} - \frac{5n^2}{n^4} - \frac{3}{n^4}} = \frac{3 - 2n - 3n^2}{1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} - \frac{3}{n^4}} =$$

$$= \frac{n^2\left(\frac{3}{n^2} - \frac{2}{n} - 3\right)}{1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} - \frac{3}{n^4}} = n^2 \cdot \left(\frac{\frac{3}{n^2} - \frac{2}{n} - 3}{1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} - \frac{3}{n^4}}\right).$$

Korzystając z twierdzenia o działaniach na ciągach zbieżnych (zob. tekst **Teoria6**) oraz z twierdzenia o działaniach na ciągach rozbieżnych (zob. tekst **Teoria8**) otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^2 \cdot \left(\frac{\frac{3}{n^2} - \frac{2}{n} - 3}{1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} - \frac{3}{n^4}}\right)\right] = -\infty,$$

ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty,$$

natomiast

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3}{n^2} - \frac{2}{n} - 3}{1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} - \frac{3}{n^4}}\right) = \frac{-3}{1} = -3,$$

gdyż

$$\frac{3}{n^2} \to 0, \quad \frac{2}{n} \to 0, \quad \frac{3}{n} \to 0, \quad \frac{5}{n^2} \to 0, \quad \frac{3}{n^4} \to 0.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (granica niewłaściwa).

ZADANIE 11. Obliczyć granicę ciągu (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie

$$a_n = \frac{3 \cdot 2^n + 6 \cdot 5^n}{2 \cdot 3^n - 2^n}. \tag{7}$$

Rozwiązanie. Dzieląc licznik i mianownik we wzorze (7) przez potęgę liczby n o największej podstawie spośród występujących w mianowniku, czyli przez 3^n, otrzymujemy:

$$\frac{3\cdot 2^n+6\cdot 5^n}{2\cdot 3^n-2^n}=\frac{\frac{3\cdot 2^n}{3^n}+\frac{6\cdot 5^n}{3^n}}{\frac{2\cdot 3^n}{3^n}-\frac{2^n}{3^n}}=\frac{3\left(\frac{2}{3}\right)^n+6\left(\frac{5}{3}\right)^n}{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=$$

$$=\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n\left[3\left(\frac{2}{5}\right)^n+6\right]}{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\left(\frac{5}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{3\left(\frac{2}{5}\right)^n+6}{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right).$$

Korzystając z twierdzenia o działaniach na ciągach zbieżnych (zob. tekst **Teoria6**) oraz z twierdzenia o działaniach na ciągach rozbieżnych (zob. tekst **Teoria8**) otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{5}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{3\left(\frac{2}{5}\right)^n+6}{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right)\right]=+\infty,$$

ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n=+\infty,$$

natomiast

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\left(\frac{2}{5}\right)^n+6}{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right)=\frac{3\cdot 0+6}{2-0}=3,$$

gdyż

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n\to 0,\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ (granica niewłaściwa).

Zadania 7. Szereg geometryczny zbieżny

ZADANIE 1. Zapisać w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych ułamek

$$x = 0,2161616... = 0,2\,(16)\,.$$

ZADANIE 2. Wyznaczyć dziedzinę D funkcji określonej wzorem

$$f\,(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{x+1}{(x+2)^2} + \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3} + ...$$

ZADANIE 3. Rozwiązać równanie

$$1 - \frac{1}{x^2-2} + \frac{1}{(x^2-2)^2} - \frac{1}{(x^2-2)^3} + ... = 2,$$

w którym lewa strona jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego zbieżnego.

ZADANIE 4. Rozwiązać nierówność

$$\frac{1}{x+2} + \frac{2x+1}{(x+2)^2} + \frac{(2x+1)^2}{(x+2)^3} + \frac{(2x+1)^3}{(x+2)^4} + ... \geq 3,$$

w której lewa strona jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego zbieżnego.

Zadania 7. Szereg geometryczny zbieżny. Rozwiązania

ZADANIE 1. Zapisać w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych ułamek

$$x = 0,2161616... = 0,2\,(16)\,.$$

Rozwiązanie. Mamy:

$$x = 0,2 + 0,0161616...\,.$$

Drugi składnik po prawej stronie powyższej równości jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego

$$\frac{16}{1000} + \frac{16}{100000} + \frac{16}{10000000} + ...$$

o pierwszym wyrazie $a_1 = \dfrac{16}{1000}$ oraz ilorazie $q = \dfrac{1}{100}$. W celu obliczenia tej sumy stosujemy wzór z tekstu **Teoria9:**

$$\frac{16}{1000} + \frac{16}{100000} + \frac{16}{10000000} + ... = \frac{\frac{16}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{16}{990}.$$

Wobec tego

$$x = \frac{2}{10} + \frac{16}{990} = \frac{214}{990} = \frac{107}{495}.$$

Odpowiedź: $x = \dfrac{107}{495}$.

ZADANIE 2. Wyznaczyć dziedzinę D funkcji określonej wzorem

$$f\,(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{x+1}{(x+2)^2} + \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3} + ...$$

Rozwiązanie. Prawa strona powyższej równości jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego

$$\frac{1}{x+2} + \frac{x+1}{(x+2)^2} + \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3} + ...$$

o pierwszym wyrazie $a_1 = \dfrac{1}{x+2}$ oraz ilorazie $q = \dfrac{x+1}{x+2}$. Musi być spełniony warunek zbieżności tego szeregu (patrz tekst **Teoria9**): $|q| < 1$, należy więc rozwiązać nierówność

$$\left|\frac{x+1}{x+2}\right| < 1,$$

którą zamieniamy na układ dwóch nierówności:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2} < 1, \\ \dfrac{x+1}{x+2} > -1. \end{cases}$$

Oczywiście musi być też spełniony warunek: $x+2 \neq 0$ (w mianowniku żadnego ułamka nie może pojawić się zero). Ostatecznie zbiór D znajdujemy rozwiązując układ trzech nierówności:

$$\begin{cases} x+2 \neq 0, \\ \dfrac{x+1}{x+2} < 1, \\ \dfrac{x+1}{x+2} > -1. \end{cases}$$

Rozwiązujemy je kolejno.

I. $x+2 \neq 0$. Oczywiście rozwiązanie ma postać: $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

II. $\dfrac{x+1}{x+2} < 1$. Mamy kolejno:

$$\frac{x+1}{x+2} < 1,$$

$$\frac{x+1}{x+2} - 1 < 0,$$

$$\frac{-1}{x+2} < 0,$$

$$x+2 > 0,$$

czyli $x \in (-2, +\infty)$.

III. $\dfrac{x+1}{x+2} > -1$. Mamy kolejno:

$$\frac{x+1}{x+2} > -1,$$

$$\frac{x+1}{x+2}+1>0,$$
$$\frac{2x+3}{x+2}>0.$$

Mnożąc obie strony tej nierówności przez dodatnie wyrażenie $(x+2)^2$ otrzymujemy:

$$(2x+3)(x+2)>0,$$

i stosując wiadomości z teorii trójmianów kwadratowych otrzymujemy: $x\in(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$.

Zbiór D jest iloczynem otrzymanych trzech zbiorów:

$$D=[(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)]\cap(-2,+\infty)\cap\left[(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)\right],$$

$$D=\left(-\frac{3}{2},+\infty\right).$$

Odpowiedź: $D=\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$.

ZADANIE 3. Rozwiązać równanie

$$1-\frac{1}{x^2-2}+\frac{1}{(x^2-2)^2}-\frac{1}{(x^2-2)^3}+...=2, \qquad (*)$$

w którym lewa strona jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego zbieżnego.

Rozwiązanie. Znajdujemy najpierw dziedzinę D równania. Lewa strona powyższej równości jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego

$$1-\frac{1}{x^2-2}+\frac{1}{(x^2-2)^2}-\frac{1}{(x^2-2)^3}+...$$

o pierwszym wyrazie $a_1=1$ oraz ilorazie $q=-\frac{1}{x^2-2}$. Musi być spełniony warunek zbieżności tego szeregu (patrz tekst **Teoria9**): $|q|<1$, należy więc rozwiązać nierówność

$$\left|-\frac{1}{x^2-2}\right|<1,$$

czyli nierówność

$$\frac{1}{|x^2-2|} < 1,$$

równoważną nierówności

$$\left|x^2-2\right| > 1.$$

Oczywiście musi być też spełniony warunek: $x^2 - 2 \neq 0$ (w mianowniku żadnego ułamka nie może pojawić się zero). Ostatecznie zbiór D znajdujemy rozwiązując układ dwóch nierówności:

$$\begin{cases} x^2 - 2 \neq 0, \\ |x^2-2| > 1. \end{cases}$$

Rozwiązujemy je kolejno.

I. $x^2 - 2 \neq 0$. Mamy: $x^2 \neq 2$, więc rozwiązanie ma postać: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$.

II. $|x^2-2| > 1$. Ta nierówność jest równoważna **alternatywie** nierówności:

$$x^2 - 2 > 1 \quad \textbf{lub} \quad x^2 - 2 < -1,$$

czyli

$$x^2 > 3 \quad \textbf{lub} \quad x^2 < 1.$$

Rozwiązaniem pierwszej nierówności jest zbiór $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$, zaś drugiej - przedział $(-1,1)$. Ostatecznie więc

$$x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup (-1,1) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right).$$

Dziedzina D równania jest częścią wspólną zbiorów otrzymanych w punktach **I** i **II**:

$$D = \left[\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)\right] \cap$$
$$\cap \left[\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup (-1,1) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)\right],$$

w końcu więc

$$D = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup (-1,1) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right).$$

Możemy teraz przystąpić do rozwiązywania równania (*). Lewą stronę obliczamy stosując wzór na sumę nieskończonego szeregu geometrycznego (patrz rekst **Teoria9**). Równanie przybiera postać:

$$\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{x^2-2}\right)} = 2,$$

czyli

$$\frac{x^2-2}{x^2-1}=2,$$

czyli

$$x^2-2=2x^2-2,$$

a stąd otrzymujemy: $x^2=0$, czyli $x=0$.

Odpowiedź: $x=0$.

ZADANIE 4. Rozwiązać nierówność

$$\frac{1}{x+2}+\frac{2x+1}{(x+2)^2}+\frac{(2x+1)^2}{(x+2)^3}+\frac{(2x+1)^3}{(x+2)^4}+...\geq 3, \tag{**}$$

w której lewa strona jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego zbieżnego.

Rozwiązanie. Znajdujemy najpierw dziedzinę D nierówności. Lewa strona powyższej nierówności jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego

$$\frac{1}{x+2}+\frac{2x+1}{(x+2)^2}+\frac{(2x+1)^2}{(x+2)^3}+\frac{(2x+1)^3}{(x+2)^4}+......$$

o pierwszym wyrazie $a_1=\frac{1}{x+2}$ oraz ilorazie $q=\frac{2x+1}{x+2}$. Musi być spełniony warunek zbieżności tego szeregu (patrz tekst **Teoria9**): $|q|<1$, należy więc rozwiązać nierówność

$$\left|\frac{2x+1}{x+2}\right|<1,$$

która jest równoważna układowi nierówności:

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{x+2}>-1, \\ \frac{2x+1}{x+2}<1. \end{cases}$$

Rozwiązujemy je kolejno.

I. $\frac{2x+1}{x+2}>-1$. Mamy kolejno:

$$\frac{2x+1}{x+2}>-1,$$

$$\frac{2x+1}{x+2}+1>0,$$
$$\frac{3x+3}{x+2}>0,$$
$$\frac{x+1}{x+2}>0.$$

Licznik lewej strony tej nierówności równy jest zeru, gdy $x=-1$, zaś mianownik równy jest zeru, gdy $x=-2$. Układamy tabelkę ("siatkę znaków"):

x		-2		-1	
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x+1}{x+2}$	$+$	$\boxtimes$	$-$	0	$+$

Z tabelki widać, że wyrażenie $\dfrac{x+1}{x+2}$ jest dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty,-2) \cup (-1,+\infty)$.

II. $\dfrac{2x+1}{x+2}<1$. Mamy kolejno:

$$\frac{2x+1}{x+2}<1,$$
$$\frac{2x+1}{x+2}-1<0,$$
$$\frac{x-1}{x+2}<0.$$

Licznik lewej strony tej nierówności równy jest zeru, gdy $x=1$, zaś mianownik równy jest zeru, gdy $x=-2$. Układamy tabelkę ("siatkę znaków"):

x		-2		1	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x+2}$	$+$	$\boxtimes$	$-$	0	$+$

Z tabelki widać, że wyrażenie $\dfrac{x-1}{x+2}$ jest ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-2,1)$.

Dziedzina D nierówności jest częścią wspólną zbiorów otrzymanych w punktach **I** i **II**:

$$D=[(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)]\cap(-2,1),$$

w końcu więc
$$D = (-1, 1)\,.$$

Możemy teraz przystąpić do rozwiązywania nierówności (**). Lewą stronę obliczamy stosując wzór na sumę nieskończonego szeregu geometrycznego (patrz rekst **Teoria9**). Nierówność przybiera postać:

$$\frac{\dfrac{1}{x+2}}{1-\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)} \geq 3,$$

czyli

$$\frac{\dfrac{1}{x+2}}{\dfrac{-x+1}{x+2}} \geq 3,$$

czyli

$$\frac{1}{1-x} - 3 \geq 0,$$

czyli

$$\frac{1-3+3x}{1-x} \geq 0,$$

czyli

$$\frac{3x-2}{1-x}$$

Licznik lewej strony tej nierówności równy jest zeru, gdy $x = \dfrac{2}{3}$, zaś mianownik równy jest zeru, gdy $x = 1$. Układamy tabelkę ("siatkę znaków"):

x		$\frac{2}{3}$		1	
$3x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{3x-2}{1-x}$	$-$	0	$+$	$\boxtimes$	$-$

Z tabelki widać, że wyrażenie $\dfrac{3x-2}{1-x}$ jest nieujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \left\langle \dfrac{2}{3}, 1\right)$.

Należy teraz znaleźć **część wspólną** wyznaczonego zbioru oraz wyznaczonej wcześniej dziedziny D nierówności:

$$D \cap \left\langle \frac{2}{3}, 1 \right) = (-1, 1) \cap \left\langle \frac{2}{3}, 1 \right) = \left\langle \frac{2}{3}, 1 \right).$$

Odpowiedź: $x \in \left\langle \frac{2}{3}, 1 \right)$.