RACHUNEK RÓŻNICZKOWY - przykłady i zadania

klasa II 2018/19

Adam Stachura

Zadania 8. Granice funkcji

ZADANIE 1. Obliczyć granicę $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{8x^3-1}{4x^2+6x-4}\right)$.

ZADANIE 2. Obliczyć granicę $\lim_{x\to7}\left(\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\right)$.

ZADANIE 3. Obliczyć granicę $\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)$.

ZADANIE 4. Zbadać granicę $\lim_{x\to-2}\left(\frac{1-16x^3}{4x^2+6x-4}\right)$.

ZADANIE 5. Zbadać granicę $\lim_{x\to3}\left(\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}\right)$.

ZADANIE 6. Obliczyć granicę $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-2x^2+5}{\frac{1}{2}x^3+4x^2+x}\right)$.

ZADANIE 7. Obliczyć granicę $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, gdzie

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+3)^2}.$$

ZADANIE 8. Obliczyć granicę $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, gdzie

$$f(x)=\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+1}+5x}. \tag{7*}$$

ZADANIE 9. Obliczyć granicę $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, gdzie

$$f(x)=\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+1}+5x}. \tag{8*}$$

ZADANIE 10. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^4-2x^5-3x^6}{x^4+3x^3-5x^2-3}\right)$.

ZADANIE 11*. Na podstawie definicji zbadać granicę $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+9}{\sqrt{x+6}}\right)$.

ZADANIE 12*. Na podstawie definicji zbadać granicę $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, gdzie

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & gdy\ x>2,\\ \dfrac{x}{x^2+1}, & gdy\ x\le 2.\end{cases} \tag{*}$$

ZADANIE 13*. Dla jakiej wartości parametru $p\in\mathbb{R}$ funkcja określona wzorami:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & dla\quad x>2,\\ x+p & dla\quad x\le 2\end{cases} \tag{9*}$$

jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych?

Zadania 8. Granice funkcji - rozwiązania

ZADANIE 1. Obliczyć granicę $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{8x^3-1}{4x^2+6x-4}\right)$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji, której granice obliczamy, czyli funkcji

$$f(x)=\frac{8x^3-1}{4x^2+6x-4} \tag{2*}$$

jest tutaj zbiór

$$D=(-\infty,-2)\cup\left(-2,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right),$$

ponieważ mianownik we wzorze (2*) równy jest zeru dla $x=-2$ i dla $x=\frac{1}{2}$. (Stwierdzamy to rozwiązując równanie: $4x^2+6x-4=0$ metodami teorii trójmianów kwadratowych). Liczba $x_0=\frac{1}{2}$ nie należy do dziedziny D, lecz jest jej punktem skupienia, więc można mówić o granicy funkcji w tym punkcie.

Mianownik równy jest zeru w punkcie $\frac{1}{2}$. Skoro jednak licznik także zeruje się w tym punkcie:

$$8\left(\frac{1}{2}\right)^3-1=0,$$

możemy zapisać licznik i mianownik w wyrażeniu (2*) w postaci iloczynu, w którym jednym z czynników jest $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ i uprościć iloraz.

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia:

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

otrzymujemy:

$$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(4x^2+2x+1\right).$$

Ponadto

$$4x^2+6x-4=4\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)$$

(tzw. postać iloczynowa trójmianu kwadratowego). Wobec tego

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{8x^3-1}{4x^2+6x-4}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left[\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2+2x+1)}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left[\frac{4x^2+2x+1}{2(x+2)}\right]=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{4x^2+2x+1}{2x+4}\right).$$

Teraz mamy:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{4x^2+2x+1}{2x+4}\right)=\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}+1}{2\cdot\frac{1}{2}+4}=\frac{3}{5}.$$

Odpowiedź: $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{8x^3-1}{4x^2+6x-4}\right)=\frac{3}{5}.$

ZADANIE 2. Obliczyć granicę $\lim_{x\to 7}\left(\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\right)$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji, której granice obliczamy, czyli funkcji

$$f(x)=\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} \tag{3*}$$

jest tutaj zbiór

$$D=\langle 3,7)\cup(7,+\infty)$$

(muszą być spełnione warunki: $x\geq 3$ ze względu na istnienie pierwiastka, $x\neq 7$ ze względu na mianownik). Liczba $x_0=7$ nie należy do dziedziny D, lecz jest jej punktem skupienia, więc można mówić o granicy funkcji w tym punkcie.

Zarówno licznik, jak też mianownik we wzorze (3*) jest równy zeru w punkcie $x_0=7$, co sugeruje sposób rozwiązywania jak w zadaniu **1**. Jednak tym razem nie chodzi o wielomiany (w każdym razie licznik wyrażenia (3*) nie jest wielomianem). Przekształcamy więc najpierw wzór (3*) pamiętając o wzorze skróconego mnożenia

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

Mamy:

$$f(x) = \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \left(\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\right) \cdot \left(\frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}}\right) =$$

$$= \frac{2^2 - \left(\sqrt{x-3}\right)^2}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} = \frac{4-(x-3)}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} =$$

$$= \frac{-(x-7)}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} = \frac{-1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}.$$

Teraz obliczamy granicę:

$$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7}\left[\frac{-1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}\right] = \frac{-1}{(7+7)\left(2+\sqrt{7-3}\right)} = -\frac{1}{56}.$$

Odpowiedź: $\lim\limits_{x\to 7}\left(\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\right) = -\frac{1}{56}.$

ZADANIE 3. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)$.

Rozwiązanie. Zadanie upodobni się do poprzednich, gdy wprowadzimy nową zmienną:

$$x = t^6,$$

pamiętając przy tym o tym, że $x \to 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t \to 1$. Mamy więc:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\right) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{\sqrt{t^6}-1}{\sqrt[3]{t^6}-1}\right) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{t^3-1^3}{t^2-1^2}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 1}\left[\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}\right] = \lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2+t+1}{t+1}\right) = \frac{3}{2}$$

(skorzystaliśmy ze wzorów skróconego mnożenia dla różnic a^3-b^3 oraz a^2-b^2).

Odpowiedź: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\right) = \frac{3}{2}.$

ZADANIE 4. Zbadać granicę $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1-16x^3}{4x^2+6x-4}\right)$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji, której granicę obliczamy, czyli funkcji

$$f(x)=\frac{1-16x^3}{4x^2+6x-4} \tag{4*}$$

jest tutaj zbiór

$$D=(-\infty,-2)\cup\left(-2,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right),$$

ponieważ mianownik we wzorze (3*) równy jest zeru dla $x=-2$ i dla $x=\frac{1}{2}$. (Stwierdzamy to rozwiązując równanie: $4x^2+6x-4=0$ metodami teorii trójmianów kwadratowych). Liczba $x_0=-2$ nie należy do dziedziny D, lecz jest jej punktem skupienia, więc można mówić o granicy funkcji w tym punkcie.

Istotna różnica pomiędzy tym zadaniem a poprzednimi polega na tym, że tutaj tylko mianownik wyrażenia (4*) zeruje się w punkcie $x_0=-2$, a licznik jest dodatni:

$$1-16(-2)^3=129.$$

Oznacza to, że zastosowanie będzie mieć tu twierdzenie **5** o działaniach na granicach niewłaściwych (dwa ostatnie podpunkty), zob. tekst **Teoria12**, w połączeniu z wnioskiem **1**, zob. tekst **Teoria11**. Spodziewamy się tu granicy w sensie niewłaściwym - $\pm\infty$. Należy tylko ustalić znak. Warto pamiętać też o tym, że w takich sytuacjach, jak ta, granice jednostronne - lewostronna i prawostronna - mogą być różne!

Skoro licznik we wzorze (4*) jest dodatni w punkcie $x_0=-2$, to na podstawie wniosku **1**, tekst **Teoria11**, dla argumentów x z odpowiednio dobranego (o małym promieniu) sąsiedztwa punktu $x_0=-2$ ten licznik jest liczbą dodatnią, czyli $1-16x^3>0$. Co do mianownika, czyli trójmianu kwadratowego

$$w(x)=4x^2+6x-4, \tag{5*}$$

to dla argumentów x z odpowiednio dobranego (o małym promieniu) **lewostronnego** sąsiedztwa punktu $x_0=-2$ ten mianownik jest liczbą dodatnią, czyli $4x^2+6x-4>0$. Można to łatwo zauważyć po narysowaniu wykresu tego trójmianu, czyli odpowiedniej paraboli i po przyjrzeniu się, co się dzieje w sąsiedztwie lewostronnym punktu $x_0=-2$. Można też niczego nie rysować, tylko zapisać trójmian (5*) w postaci iloczynowej

$$w(x)=4(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

i zauważyć, że gdy x należy do lewostronnego sasiędztwa punktu -2, to $x < -2$, więc $x + 2 < 0$ oraz $x - \frac{1}{2} < 0$, no a "minus razy minus daje plus", więc $w(x) > 0$.

Wynika stąd, że obliczając granicę **lewostronną** funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = -2$ dzielimy liczby dodatnie przez dodatnie, co prowadzi do wniosku, że

$$\lim_{x \to -2^-} \left(\frac{1 - 16x^3}{4x^2 + 6x - 4} \right) = +\infty.$$

W podobny sposób stwierdzamy, że dla argumentów x z odpowiednio dobranego (o małym promieniu) **prawostronnego** sąsiedztwa punktu $x_0 = -2$ mianownik we wzorze (4*) jest liczbą ujemną, czyli $4x^2 + 6x - 4 < 0$. Wynika stąd, że obliczając granicę **prawostronną** funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = -2$ dzielimy liczby dodatnie przez ujemne, co prowadzi do wniosku, że

$$\lim_{x \to -2^+} \left(\frac{1 - 16x^3}{4x^2 + 6x - 4} \right) = -\infty.$$

Granice - lewostronna i prawostronna są różne, co oznacza, że granica $\lim_{x \to -2} f(x)$ nie istnieje nawet w niewłaściwym sensie.

Odpowiedź: Granica $\lim_{x \to -2} f(x)$ nie istnieje, natomiast $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$.

ZADANIE 5. Zbadać granicę $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} \right)$.

Rozwiązanie. Ponieważ licznik i mianownik we wzorze

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$$

zeruje się w punkcie $x_0 = 3$, więc zaczynamy jak w zadaniu **3**:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{(x - 3)(x - 3)} = \frac{x + 3}{x - 3}.$$

Teraz zauważamy, że dla $x_0 = 3$ mianownik $x - 3$ zeruje się, $3 - 3 = 0$, zaś licznik jest dodatni, $3 + 3 = 6 > 0$. Dlatego od tego miejsca rozumujemy jak w zadaniu **4**, stwierdzając, że (szczegóły pomijam):

$$\lim_{x \to 3^-} \left(\frac{x + 3}{x - 3} \right) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 3^+} \left(\frac{x + 3}{x - 3} \right) = +\infty.$$

Odpowiedź: Granica $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9}\right)$ nie istnieje, natomiast

$$\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}\right)=+\infty.$$

ZADANIE 6. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2+5}{\frac{1}{2}x^3+4x^2+x}\right)$.

Rozwiązanie. Tego typu "granice w nieskończoności" obliczamy w sposób niemal identyczny jak granice ciągów liczbowych. Dzieląc licznik i mianownik we wzorze

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+5}{\frac{1}{2}x^3+4x^2+x}$$

przez x w potędze o najwyższym wykładniku spośród występujących w mianowniku, czyli przez x^3, otrzymujemy:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^3-2x^2+5}{\frac{1}{2}x^3+4x^2+x}\right)=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}\right)=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{2}+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=$$

$$=\frac{1-0+0}{\frac{1}{2}+0+0}=2,$$

ponieważ przy $x\to -\infty$ mamy:

$$\frac{2}{x}\to 0, \quad \frac{5}{x^3}\to 0, \quad \frac{4}{x}\to 0, \quad \frac{1}{x^2}\to 0$$

(zobacz tekst **Teor13** "pożyteczne wzory").

Odpowiedź: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2+5}{\frac{1}{2}x^3+4x^2+x}\right)=2.$

ZADANIE 7. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, gdzie

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+3)^2}.$$

Rozwiązanie. Tego typu "granice w nieskończoności" obliczamy w sposób niemal identyczny jak granice ciągów liczbowych. Mamy:

$$f(x) = \frac{x-1}{4x + 12\sqrt{x} + 9}. \tag{6*}$$

Dzieląc licznik i mianownik we wzorze (6*) przez x w potędze o najwyższym wykładniku spośród występujących w mianowniku, czyli przez x, otrzymujemy:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{4x+12\sqrt{x}+9}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{12\sqrt{x}}{x}+\frac{9}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{4+\frac{12}{\sqrt{x}}+\frac{9}{x}}\right) =$$

$$= \frac{1-0}{4+0+0} = \frac{1}{4},$$

ponieważ przy $x \to +\infty$ mamy:

$$\frac{1}{x} \to 0, \qquad \frac{12}{\sqrt{x}} \to 0, \qquad \frac{9}{x} \to 0$$

(zobacz tekst **Teor13** "pożyteczne wzory").

Odpowiedź: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{4}$.

ZADANIE 8. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, gdzie

$$f(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+1}+5x}. \tag{7*}$$

Rozwiązanie. Tego typu "granice w nieskończoności" obliczamy w sposób niemal identyczny jak granice ciągów liczbowych. Dzieląc licznik i mianownik we wzorze (7*) przez x i korzystając z reguły włączania pod pierwiastek otrzymujemy:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+x}+5x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{3x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}+\frac{5x}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2+x}{x^2}}+5}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+5}\right) = \frac{3+0}{\sqrt{4+0}+5} = \frac{3}{7},$$

ponieważ przy $x \to +\infty$ mamy:

$$\frac{4}{x} \to 0, \qquad \frac{1}{x} \to 0$$

(zobacz tekst **Teoria13** "pożyteczne wzory").

Odpowiedź: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3}{7}$.

ZADANIE 9. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, gdzie

$$f(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+1}+5x}. \tag{8*}$$

Rozwiązanie. Zadanie wygląda na niemal identyczne z poprzednim - i takie jest, z jedną modyfikacją. Mianowicie, skoro obliczamy granicę przy $x \to -\infty$, to argument x jest teraz liczbą ujemną, a w takim razie obowiązuje inna reguła przy włączaniu pod pierwiastek. Dla ujemnych x-ów

$$\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} \neq \sqrt{\frac{4x^2+x}{x^2}},$$

a poprawne włączanie pod pierwiastek wykonujemy zgodnie z regułą:

$$\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} = -\frac{\sqrt{4x^2+1}}{-x} = -\sqrt{\frac{4x^2+x}{(-x)^2}} = -\sqrt{\frac{4x^2+x}{x^2}}.$$

Uwzględniając to oraz dzieląc licznik i mianownik we wzorze (8*) przez x otrzymujemy:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2+x}+5x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\frac{3x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}+\frac{5x}{x}} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3+\frac{4}{x}}{-\sqrt{\frac{4x^2+x}{x^2}}+5} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3+\frac{4}{x}}{-\sqrt{4+\frac{1}{x}}+5} \right) = \frac{3+0}{-\sqrt{4+0}+5} = \frac{3}{3} = 1,$$

ponieważ przy $x \to -\infty$ mamy:

$$\frac{4}{x} \to 0, \qquad \frac{1}{x} \to 0$$

(zobacz tekst **Teoria13** "pożyteczne wzory").

Odpowiedź: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1.$

ZADANIE 10. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^4-2x^5-3x^6}{x^4+3x^3-5x^2-3}\right)$.

Rozwiązanie. Dzieląc licznik i mianownik we wzorze

$$f(x) = \frac{3x^4-2x^5-3x^6}{x^4+3x^3-5x^2-3}$$

przez x w potędze o najwyższym wykładniku sposród występujących w mianowniku, czyli przez x^4, otrzymujemy:

$$\frac{3x^4-2x^5-3x^6}{x^4+3x^3-5x^2-3} = \frac{\frac{3x^4}{x^4}-\frac{2x^5}{x^4}-\frac{3x^6}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}+\frac{3x^3}{x^4}-\frac{5x^2}{x^4}-\frac{3}{x^4}} = \frac{3-2x-3x^2}{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^4}} =$$

$$= \frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}-3\right)}{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^4}} = x^2\cdot\left(\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}-3}{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^4}}\right).$$

Korzystając z twierdzenia o działaniach na granicach skończonych (zob. tekst **Teoria12**, twierdzenie **1**) oraz z odpowiedniego podpunktu twierdzenia o działaniach na granicach niewłaściwych (zob. tekst **Teoria12**, twierdzenie **4**) otrzymujemy:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}-3}{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^4}}\right)\right] = -\infty,$$

ponieważ przy $x\to+\infty$ mamy oczywiście

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,$$

natomiast

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}-3}{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^4}}\right) = \frac{-3}{1} = -3,$$

gdyż przy $x\to+\infty$ mamy:

$$\frac{3}{x^2}\to 0,\quad \frac{2}{x}\to 0,\quad \frac{3}{x}\to 0,\quad \frac{5}{x^2}\to 0,\quad \frac{3}{x^4}\to 0$$

(zobacz tekst **Teor13** "pożyteczne wzory").

Odpowiedź: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^4-2x^5-3x^6}{x^4+3x^3-5x^2-3}\right)=-\infty$ (granica niewłaściwa).

ZADANIE 11*. Na podstawie definicji zbadać granicę $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+9}{\sqrt{x+6}}\right)$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest tutaj zbiór $D=(-6,+\infty)$ (musi być spełniony warunek: $x+6>0$ ze względu na istnienie pierwiastka, a także z uwagi na to, że nie może być zera w mianowniku). Liczba $x_0=3$ należy do zbioru D i jest jego punktem skupienia. Wybieramy (zobacz tekst **Teoria10**, Definicja **1**) dowolny ciąg (x_n), $n\in\mathbb{N}_1$, taki, że:

$x_n\in D$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_1$,
$x_n\neq 3$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_1$,
$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.
Obliczamy:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n+9}{\sqrt{x_n+6}}\right)=\frac{3+9}{\sqrt{3+6}}=4$$

ze względu na znane własności granic ciągów zbieżnych.

Odpowiedź: Granica istnieje i $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+9}{\sqrt{x+6}}\right)=4$.

ZADANIE 12*. Na podstawie definicji zbadać granicę $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$, gdzie

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & gdy\ x>2,\\[2mm] \dfrac{x}{x^2+1}, & gdy\ x\le 2.\end{cases}\qquad (*)$$

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest tutaj zbiór $D=\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych. Obliczamy najpierw granicę prawostronną na podstawie definicji (zob. tekst **Teoria10**, Definicja **2**). Wybieramy dowolny ciąg (x_n), $n\in\mathbb{N}_1$, taki, że:

$x_n>2$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_1$,
$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.
(Warunek: $x_n\in D$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_1$ jest tu spełniony, skoro $D=\mathbb{R}$.) Obliczamy granicę pamiętając o tym, że skoro $x_n>2$, to "działa" pierwszy ze wzorów (*):

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2}.$$

Zatem

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Obliczamy teraz granicę lewostronną na podstawie definicji (zob. tekst **Teoria10**, Definicja **3**). Wybieramy dowolny ciąg (x_n), $n \in \mathbb{N}_1$, taki, że:

$x_n < 2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$,

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$.

Obliczamy granicę pamiętając o tym, że skoro $x_n < 2$, to "działa" drugi ze wzorów (*):

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{x_n^2 + 1} = \frac{2}{2^2 + 1} = \frac{2}{5}.$$

Zatem

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{2}{5}.$$

Oczywiście $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{5}$, czyli

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x),$$

co świadczy o tym, że badana granica nie istnieje (zob. tekst **Teoria11**, Fakt **1**).

Odpowiedź: Granica nie istnieje.

ZADANIE 13*. Dla jakiej wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ funkcja określona wzorami:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & dla \quad x > 2, \\ x + p & dla \quad x \leq 2 \end{cases} \tag{9*}$$

jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych?

Rozwiązanie. Funkcja jest ciągła w każdym punkcie x różnym od punktu $x_0 = 2$. Wystarczy więc znaleźć taką wartość parametru p, dla której funkcja będzie ciągła w punkcie $x_0 = 2$. Zgodnie z definicją ciągłości funkcji w punkcie (zob. tekst **Teoria10**, definicja **4**) będzie tak wtedy, gdy będzie istnieć granica funkcji w punkcie 2, równa wartości funkcji w tym punkcie.

Jak wynika z drugiego ze wzorów (9*), wartość funkcji w punkcie 2 jest równa

$$f(2) = 2 + p.$$

Granicę lewostronną funkcji f w punkcie 2 także wyznaczamy korzystając z drugiego ze wzorów (9*):

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+p) = 2+p.$$

Granicę prawostronną funkcji f w punkcie 2 wyznaczamy korzystając z pierwszego ze wzorów (9*):

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^+} \left[\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 2+2 = 4.$$

Skoro ma istnieć granica $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, to te granice powinny być równe (zob. tekst **Teoria11,** fakt **1**), czyli powinna zachodzić równość:

$$2+p=4,$$

skąd otrzymujemy: $p=2$.

Odpowiedź: Funkcja jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$ dla $p=2$.

Zadania 9. Obliczanie pochodnych, styczne do wykresu

ZADANIE 1. Wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = 3x^2\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$.

ZADANIE 2. Wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = 3\sqrt{x}\sin x$.

ZADANIE 3. Wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{3x+1}$.

ZADANIE 4. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ w punkcie o odciętej $x_0 = \pi$.

ZADANIE 5. Pod jakim kątem styczna do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 1$ przecina oś OX ?

ZADANIE 6*. Napisać równanie wspólnej stycznej do wykresów funkcji $f(x) = x^2 + 8x + 4$ i $g(x) = x^2 + 4x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.

ZADANIE 7*. Dana jest funkcja $f(x) = |x^2 - 4|$, $x \in \mathbb{R}$. Znaleźć równanie stycznej do wykresu tej funkcji w każdym punkcie $(x_0, f(x_0))$ wykresu, w którym istnieje ta styczna. Dla pumktów $(x_0, f(x_0))$ wykresu, w których styczna nie jest określona, zbadać istnienie stycznych jednostronnych - prawostronnej i lewostronnej, a jeżeli one istnieją, napisać ich równania.

Zadania 9. Obliczanie pochodnych, styczne do wykresu - rozwiązania

ZADANIE 1. Wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = 3x^2\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}$.

Rozwiązanie. Zaczynamy od przedstawienia funkcji w postaci sumy funkcji potęgowych, czyli składników postaci: cx^a (a więc bez użycia symbolu pierwiastka). Ponieważ

$$x^2\sqrt{x} = x^2x^{\frac{1}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}},$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^0}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{2-\frac{1}{2}} + x^{0-\frac{1}{2}} =$$

$$= x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}},$$

więc

$$f(x) = 3x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}} - \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) = 3x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}.$$

Możemy teraz skorzystać ze wzoru na pochodną funkcji potęgowej:

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

(zob. tekst **Teoria15**, wzór (5)), a także z twierdzenia o pochodnej sumy i różnicy i ze wzoru

$$(cf(x))' = c \cdot f'(x)$$

(zob. tekst **Teoria14**, Twierdzenie **3**). Mamy:

$$\left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}},$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},$$

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}},$$

więc

$$f'(x) = \left(3x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= 3\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + 2\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{15}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

Można (ale nie jest to konieczne) zapisać wynik używając symboli pierwiastków i wtedy wygląda on tak oto:

Odpowiedź: Pochodna funkcji f jest równa

$$f'(x) = \frac{15\sqrt{x^3}}{2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

ZADANIE 2. Wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = 3\sqrt{x}\sin x$.

Rozwiązanie. Rozważana funkcja jest iloczynem dwóch innych funkcji, więc zastosowanie znajdzie tu wzór na pochodną iloczynu (zob. tekst **Teoria14**, Twierdzenie **3**). Z niego, a także z tabeli pochodnych funkcji elementarnych (zob. tekst **Teoria15**) otrzymujemy:

$$f'(x) = \left(3\sqrt{x}\sin x\right)' = \left(3\sqrt{x}\right)'\cdot\sin x + 3\sqrt{x}\cdot(\sin x)' =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + 3\sqrt{x}\cos x = \frac{3\sin x}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\cos x.$$

Odpowiedź: $f'(x) = \dfrac{3\sin x}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\cos x.$

ZADANIE 3. Wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{3x+1}.$

Rozwiązanie. Rozważana funkcja jest ilorazem dwóch innych funkcji, więc zastosowanie znajdzie tu wzór na pochodną ilorazu (zob. tekst **Teoria14**, Twierdzenie **3**). Z niego, a także z tabeli pochodnych funkcji elementarnych (zob. tekst **Teoria15**) otrzymujemy:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+2x}{3x+1}\right)' = \frac{(x^2+2x)'\cdot(3x+1) - (x^2+2x)\cdot(3x+1)'}{(3x+1)^2} =$$

$$= \frac{(2x+2)(3x+1) - (x^2+2x)\cdot 3}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2+8x+2-3x^2-6x}{(3x+1)^2} =$$

$$= \frac{6x^2+8x+2-3x^2-6x}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2+2x+2}{(3x+1)^2}.$$

Odpowiedź: $f'(x) = \dfrac{3x^2+2x+2}{(3x+1)^2}$.

ZADANIE 4. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ w punkcie o odciętej $x_0 = \pi$.

Rozwiązanie. Jedyne, co tu trzeba zrobić, to zastosować wzór z tekstu **Teoria16** - równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie o odciętej x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \tag{3*}$$

oraz skorzystać z tabelki pochodnych funkcji elementarnych (tekst **Teoria15**)). Ustalamy dane:

$$x_0 = \pi,$$

$$f(x) = \sin x, \qquad f(x_0) = \sin \pi = 0,$$

$$f'(x) = \cos x, \qquad f'(x_0) = \cos \pi = -1,$$

więc ze wzoru (3*) otrzymujemy:

$$y = (-1)(x - \pi) + 0,$$

czyli odpowiedź wygląda następująco:

Odpowiedź: Szukane równanie ma postać: $y = -x + \pi$.

ZADANIE 5. Pod jakim kątem styczna do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 1$ przecina oś OX ?

Rozwiązanie. Poza wzorem z tekstu **Teoria16** jedyne, co trzeba uwzględnić, to fakt, że prosta o równaniu $y = ax + b$ tworzy z osią OX, a dokładniej - z jej dodatnią częścią taki kąt φ, którego tangens jest równy a :

$$\mathrm{tg}\varphi = a.$$

(Potocznie mówi się, że prosta przecina oś OX pod kątem φ, i o ten kąt chodzi w zadaniu.)

Dane do napisania równania stycznej ustalamy jak w zadaniu **4**, przy czym pochodną funkcji f obliczamy jak w zadaniu **3**:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{(x)' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Wobec tego mamy:

$$x_0 = 1,$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \qquad f(x_0) = \frac{1}{2},$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, \qquad f'(x_0) = \frac{1}{4},$$

więc ze wzoru (3*) otrzymujemy:

$$y = \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.$$

Wynika stąd odpowiedź.

Odpowiedź: Styczna do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ w punkcie o odciętej $x_0 = 1$ przecina oś OX pod takim kątem φ, że $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{1}{4}$.

ZADANIE 6*. Napisać równanie wspólnej stycznej do wykresów funkcji $f(x) = x^2 + 8x + 4$ i $g(x) = x^2 + 4x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Równania stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_1, f(x_1))$ oraz stycznej do wykresu funkcji g w punkcie $(x_2, g(x_2))$ napiszemy korzystając z ogólnego wzoru przedztawiającego równanie stycznej, zob. tekst **Teoria16**:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{5*}$$

Ze wzorów na pochodne funkcji elementarnych i z twierdzenia **3**, tekst **Teoria14** otrzymujemy:

$$f'(x) = 2x + 8, \qquad g'(x) = 2x + 4.$$

Wobec tego równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_1, f(x_1))$ ma postać:

$$y = (2x_1 + 8)(x - x_1) + x_1^2 + 8x_1 + 4,$$

co można zapisać w postaci:

$$y = (2x_1 + 8)x - (2x_1 + 8)x_1 + x_1^2 + 8x_1 + 4,$$

i po prostych przekształceniach

$$y = (2x_1 + 8)x - x_1^2 + 4. \tag{6*}$$

Równanie stycznej do wykresu funkcji g w punkcie $(x_2, g(x_2))$ ma postać:

$$y = (2x_2 + 4)(x - x_2) + x_2^2 + 4x_2 + 8,$$

co można zapisać w postaci:

$$y = (2x_2 + 4)x - (2x_2 + 4)x_2 + x_2^2 + 4x_2 + 8,$$

i po prostych przekształceniach

$$y = (2x_2 + 4)x - x_2^2 + 8. \tag{7*}$$

Jak napisano we wskazówce, skoro styczna ma być wspólna, otrzymane równania powinny być identyczne. Porównując prawe strony równań (6*) oraz (7*) otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8 = 2x_2 + 4, \\ -x_1^2 + 4 = -x_2^2 + 8, \end{cases}$$

który można napisać w postaci:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2, \\ -x_1^2 + x_2^2 = 4. \end{cases} \tag{8*}$$

Postąpimy w najprostszy sposób. Z pierwszego spośród równań (8*) wyznaczamy x_1 :

$$x_1 = x_2 - 2,$$

i wstawiamy to do drugiego równania otrzymując kolejno:

$$-(x_2 - 2)^2 + x_2^2 = 4,$$

$$-x_2^2 + 4x_2 - 4 + x_2^2 = 4,$$

$$4x_2 = 8,$$

czyli $x_2 = 2$, a w takim razie $x_1 = 0$.

Wystarczy teraz wstawić $x_1 = 0$ do równania (6*) albo $x_2 = 2$ do równania (7*) (proszę sprawdzić, że w obydwu przypadkach otrzymujemy ten sam wynik: $y = 8x + 4$).

Odpowiedź: Wspólną styczną do wykresów funkcji f i g jest prosta o równaniu $y = 8x + 4$.

ZADANIE 7*. Dana jest funkcja $f(x) = |x^2 - 4|$, $x \in \mathbb{R}$. Znaleźć równanie stycznej do wykresu tej funkcji w każdym punkcie $(x_0, f(x_0))$ wykresu, w którym istnieje ta styczna. Dla pumktów $(x_0, f(x_0))$ wykresu, w których styczna nie jest określona, zbadać istnienie stycznych jednostronnych - prawostronnej i lewostronnej, a jeżeli one istnieją, napisać ich równania.

Rozwiązanie: Jak wiadomo, styczna istnieje tylko w takich punktach $(x_0, f(x_0))$ wykresu funkcji f, dla których istnieje pochodna $f'(x_0)$, i wtedy równanie stycznej można napisać w postaci:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{*}$$

Natomiast w każdym punkcie $(x_0, f(x_0))$ wykresu takim, ze pochodna $f'(x_0)$ nie istnieje, nie istnieje także styczna do wykresu. Dla takiego punktu można sprawdzać, czy istnieją pochodne jednostronne. Jeżeli tak jest, możemy napisać równania stycznych jednostronnych - prawostronnej i lewostronnej - do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Te wszystkie wiadomości można znaleźć w tekście **Teoria16**.

Zaczynamy od napisania wzoru na funkcję f w postaci nie zawierającej symbolu wartości bezwzględnej. W tym celu musimy wiedzieć, dla jakich x-ów zachodzi nierówność: $x^2 - 4 \geq 0$. Dla każdej takiej liczby x mamy:

$$\left|x^2 - 4\right| = x^2 - 4.$$

Natomiast dla każdej liczby x takiej, że $x^2 - 4 < 0$, będzie:

$$\left|x^2 - 4\right| = -\left(x^2 - 4\right) = 4 - x^2.$$

Nierówność: $x^2 - 4 \geq 0$ rozwiązujemy w sposób znany z teorii trójmianów kwadratowych, otrzymując:

$$x^2 - 4 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [(-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)].$$

W podobny sposób rozwiązujemy drugą nierówność i mamy:

$$x^2 - 4 < 0 \Longleftrightarrow x \in (-2, 2) .$$

Wzór na funkcję f piszemy w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{gdy} \quad x \in [(-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)] , \\ 4 - x^2, & \text{gdy} \quad x \in (-2, 2) . \end{cases} \tag{**}$$

Wobec tego dla jej pochodnej możemy na razie napisać:

$$f'(x_0) = \begin{cases} 2x_0, & \text{gdy} \quad x_0 \in (-\infty, -2) , \\ ?\, , & \text{gdy} \quad x_0 = -2, \\ -2x_0, & \text{gdy} \quad x_0 \in (-2, 2) , \\ ?\, , & \text{gdy} \quad x_0 = 2, \\ 2x_0, & \text{gdy} \quad x_0 \in (2, +\infty) . \end{cases} \tag{***}$$

W punktach $x_0 = -2$ oraz $x_0 = 2$, gdzie "sklejają się" fragmenty różnych parabol (proszę sporządzić wykres funkcji f) pochodna może nie istnieć. W tych punktach sprawdzamy (zgodnie z poleceniem), czy istnieją pochodne jednostronne (jeżeli tak, to istnieją odpowiednie jednostronne styczne). Korzystamy z definicji pochodnych jednostronnych (zob. tekst **Teoria14**, Definicje **2**, **3**).

Dla punktu $x_0 = -2$ mamy:

$$f'_+(-2) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{4 - (-2+h)^2 - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{4 - (4 - 4h + h^2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h(4-h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} (4 - h) = 4,$$

ponieważ, gdy $h \to 0^+$, mamy: $h > 0$, więc $-2+h > -2$ i $-2+h$ należy do przedziału $(-2, 2)$, zatem wartość funkcji $f(-2+h)$ obliczamy wstawiając $x = -2 + h$ do drugiego spośród wzorów (**).

Podobnie obliczamy pochodną lewostronną w punkcie $x_0 = -2$:

$$f'_-(-2) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(-2+h)^2 - 4 - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{(4 - 4h + h^2) - 4}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h(-4+h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-4 + h) = -4,$$

ponieważ, gdy $h \to 0^-$, mamy: $h < 0$, więc $-2+h < -2$ i $-2+h$ należy do przedziału $(-\infty, -2)$, zatem wartość funkcji $f(-2+h)$ obliczamy wstawiając $x = -2 + h$ do pierwszego spośród wzorów (**).

Skoro

$$f'_{+}(-2) = 4, \qquad f'_{-}(-2) = -4,$$

to $f'_{+}(-2) \neq f'_{-}(-2)$, a to oznacza, że nie istnieje pochodna $f'(-2)$ - funkcja nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

W podobny sposób (szczegóły pomijam) pokazujemy, że

$$f'_{+}(2) = 4, \qquad f'_{-}(2) = -4,$$

tak więc $f'_{+}(2) \neq f'_{-}(-2)$, a to oznacza, że nie istnieje pochodna $f'(2)$ - funkcja nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

Wzory(***) możemy teraz uzupełnić:

$$f'(x_0) = \begin{cases} 2x_0, & \text{gdy } x_0 \in (-\infty, -2), \\ \textit{nie istnieje}, & \text{gdy } x_0 = -2: \ f'_{+}(-2) = 4,\ f'_{-}(-2) = -4, \\ -2x_0, & \text{gdy } x_0 \in (-2, 2), \\ \textit{nie istnieje}, & \text{gdy } x_0 = 2: \ f'_{+}(2) = 4,\ f'_{-}(2) = -4, \\ 2x_0, & \text{gdy } x_0 \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Wynika stąd, że w każdym punkcie $(x_0, f(x_0))$ takim, że $x_0 \neq -2$ i $x_0 \neq 2$, wykres posiada styczną, a jej równanie można napisać korzystając ze wzoru (*). (Patrz odpowiedź).

Natomiast w punktach:

$$(-2, f(-2)) = (-2, 0)$$

oraz

$$(2, f(2)) = (2, 0)$$

styczna nie istnieje, natomiast istnieją styczne jednostronne, a ich równania można napisać korzystając z tekstu **Teoria16**. (Patrz odpowiedź).

Odpowiedź: W każdym punkcie $(x_0, f(x_0))$ takim, że $x_0 \neq -2$ i $x_0 \neq 2$, wykres posiada styczną. Jeżeli $x_0 \in (-\infty, -2)$ lub $x_0 \in (2, +\infty)$, to równanie stycznej wygląda tak:

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 - 4.$$

Jeżeli zaś $x_0 \in (-2, 2)$, to równanie stycznej ma postać:

$$y = (-2x_0)(x - x_0) + 4 - x_0^2.$$

W punkcie $(-2, f(-2)) = (-2, 0)$ wykres ma styczną prawostronną, a jest nią półprosta:

$$y = 4(x + 2), \qquad x \geq -2,$$

a także styczną lewostronną, a jest nią półprosta:

$$y = -4(x+2), \qquad x \leq -2.$$

W punkcie $(2, f(2)) = (2, 0)$ wykres ma styczną prawostronną, a jest nią półprosta:

$$y = 4(x-2), \qquad x \geq 2,$$

a także styczną lewostronną, a jest nią półprosta:

$$y = -4(x-2), \qquad x \leq 2.$$

Zadania 10. Przebieg zmienności funkcji

ZADANIE 1. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 - 12x$, $x \in \mathbb{R}$.

ZADANIE 2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^3 - 12x$, $x \in \mathbb{R}$.

ZADANIE 3. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

ZADANIE 4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

ZADANIE 5. Określić dziedzinę D i wyznaczyć asymptoty pionowe wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+6x+5}$.

ZADANIE 6. Określić dziedzinę D i wyznaczyć asymptoty pionowe wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2+5}$.

ZADANIE 7. Określić dziedzinę D i wyznaczyć asymptoty ukośne wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$.

ZADANIE 8. Określić dziedzinę D i wyznaczyć asymptoty ukośne wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x^3}{x+2}$.

ZADANIE 9. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = x^3 - 12x$, $x \in \mathbb{R}$.

ZADANIE 10. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

ZADANIE 11. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^3 - 3x$ w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$.

ZADANIE 12. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$.

Zadania 10. Przebieg zmienności funkcji - rozwiązania

ZADANIE 1. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 - 12x$, $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Zastosujemy twierdzenie **2**, punkty (d), (e), z tekstu **Teoria18**. Zgodnie z tym, co tam napisano, należy rozwiązać nierówności:

$$f'(x) > 0, \qquad f'(x) < 0.$$

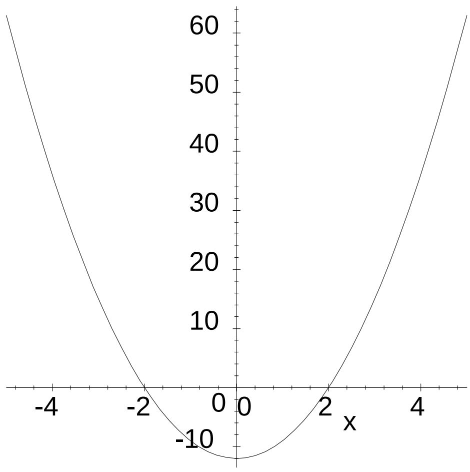
Mamy:

$$f'(x) = \left(x^3 - 12x\right)' = 3x^2 - 12,$$

przyjdzie więc nam rozwiązać nierówności:

$$3x^2 - 12 > 0, \qquad 3x^2 - 12 < 0.$$

Rzeczywiście rozwiążemy je jednocześnie, korzystając z teorii trójmianów kwadratowych. Ponieważ miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójmianu $f'(x) = 3x^2 - 12$ są liczby $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, zaś parabola będąca wykresem tego trójmianu ma gałęzie zwrócone ku górze, możemy ją łatwo naszkicować. Oto wykres trójmianu $f'(x) = 3x^2 - 12$ (czyli pochodnej funkcji f):



$f'(x) = 3x^2 - 12$

Z rysunku łatwo można zauważyć, że

$$3x^2 - 12 > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Wobec tego w przedziałach: $(-\infty, -2)$ oraz $(2, +\infty)$ funkcja jest rosnąca (zob. tekst **Teoria18**, tw. **2**).

Widać także, że

$$3x^2 - 12 < 0 \Longleftrightarrow x \in (-2, 2)\,.$$

Wobec tego w przedziale $(-2, 2)$ funkcja jest malejąca (zob. tekst **Teoria18**, tw. **2**).

Możemy jeszcze sporządzić tabelkę obrazującą te fakty:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

oraz napisać odpowiedź:

Odpowiedź: Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -2)$ oraz w przedziale $(2, +\infty)$. Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-2, 2)$.

ZADANIE 2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^3 - 12x$, $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Zastosujemy twierdzenia **1** i **4** z tekstu **Teoria18**. Zaczynamy od rozwiązania równania

$$f'(x) = 0,$$

czyli od wyznaczenia punktów stacjonarnych. Mamy:

$$f'(x) = \left(x^3 - 12x\right)' = 3x^2 - 12,$$

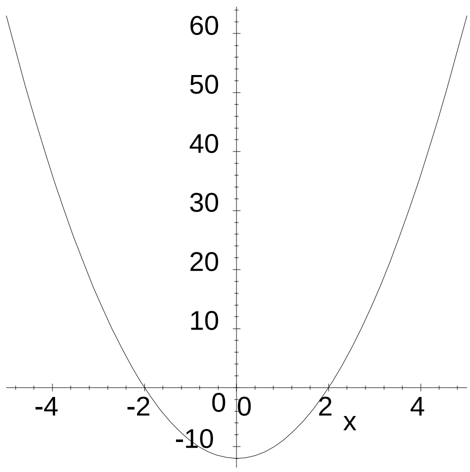
przyjdzie więc nam rozwiązać równanie:

$$3x^2 - 12 = 0.$$

Zgodnie z tym, co wiemy o trójmianach kwadratowych, równanie to ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = -2, \qquad x_2 = 2,$$

zaś wykresem trójmianu kwadratowego $f'(x) = 3x^2 - 12$ (czyli pochodnej funkcji f) jest taka oto parabola:



$f'(x) = 3x^2 - 12$

Teraz stosujemy twierdzenie **4**, tekst **Teoria18**. Widać z rysunku, że w punkcie $x_1 = -2$ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny (czyli na lewo od tego punktu jest większa od zera, zaś na prawo - mniejsza od zera). Zatem w punkcie $x_1 = -2$ funkcja f ma maksimum lokalne właściwe. Obliczamy to maksimum:

$$f(x_1) = f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = 16.$$

Widać także z rysunku, że w punkcie $x_2 = 2$ pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni (czyli na lewo od tego punktu jest mniejsza od zera, zaś na prawo - większa od zera). Zatem w punkcie $x_2 = 2$ funkcja f ma minimum lokalne właściwe. Obliczamy to minimum:

$$f(x_2) = f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16.$$

Możemy napisać odpowiedź.

Odpowiedź: W punkcie $x_1 = -2$ funkcja f ma maksimum lokalne właściwe, wynoszące $f(-2) = 16$. W punkcie $x_2 = 2$ funkcja f ma minimum lokalne właściwe, wynoszące $f(2) = -16$.

ZADANIE 3. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Rozwiązanie. Zastosujemy twierdzenie **2**, punkty (d), (e), z tekstu **Teoria18**. Zgodnie z tym, co tam napisano, należy rozwiązać nierówności:

$$f'(x) > 0, \qquad f'(x) < 0.$$

Mamy (korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu):

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x-2}\right)'=\frac{(x^2)'(x-2)-x^2(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2},$$

$$f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2},$$

przyjdzie więc nam rozwiązać nierówności:

$$\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}>0,\qquad \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}<0.$$

Ponieważ

$$\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

i wiadomo, że

$$\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}=0\Longleftrightarrow(x=0 \text{ lub } x=4),$$

a także wiadomo, że $(x-2)^2>0$ dla każdej liczby $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, więc możemy pomóc sobie tabelką ("siatką znaków'):

x		**0**		**2**		**4**	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$	$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$

(symbol $\vdots$ oznacza oczywiście, że wyrażenie $\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ nie jest określone dla $x=2$).

Z tej tabelki łatwo można odczytać, że

$$\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}>0\Longleftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty).$$

Wobec tego w przedziałach: $(-\infty,0)$ oraz $(4,+\infty)$ funkcja jest rosnąca (zob. tekst **Teoria18**, tw. **2**).

Widać także, że

$$\frac{x(x-4)}{(x-2)^2} < 0 \Longleftrightarrow x \in (0,2) \cup (2,4).$$

Wobec tego w przedziałach: $(0,2)$ oraz $(2,4)$ funkcja jest malejąca (zob. tekst **Teoria18**, tw. **2**).

Możemy jeszcze sporządzić tabelkę obrazującą te fakty:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\vdots$	$\searrow$		$\nearrow$	

oraz napisać odpowiedź:

Odpowiedź: Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz w przedziale $(4, +\infty)$. Funkcja f jest malejąca w przedziale $(0,2)$ oraz w przedziale $(2,4)$.

ZADANIE 4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Rozwiązanie. Zastosujemy twierdzenia **1** i **4** z tekstu **Teoria18**. Zaczynamy od rozwiązania równania

$$f'(x) = 0,$$

czyli od wyznaczenia punktów stacjonarnych. Mamy:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-2}\right)' = \frac{(x^2)'(x-2) - x^2(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2},$$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2},$$

przyjdzie więc nam rozwiązać równanie:

$$\frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = 0,$$

które jest równoważne równaniu:

$$x^2 - 4x = 0,$$

czyli

$$x\,(x-4) = 0.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 4.$$

W zadaniu poprzednim (zadanie **3**) wyprowadziliśmy tabelkę określającą znak pochodnej (a także przedziały monotoniczności funkcji). Wygląda ona tak:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\vdots$	$\searrow$		$\nearrow$	

Teraz stosujemy twierdzenie **4**, tekst **Teoria18**. Widać z tabelki, że w punkcie $x_1 = 0$ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny. Zatem w punkcie $x_1 = 0$ funkcja f ma maksimum lokalne właściwe. Obliczamy to maksimum:

$$f(x_1) = f(0) = 0.$$

Widać także z tabelki, że w punkcie $x_2 = 4$ pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni (czyli na lewo od tego punktu jest mniejsza od zera, zaś na prawo - większa od zera). Zatem w punkcie $x_2 = 4$ funkcja f ma minimum lokalne właściwe. Obliczamy to minimum:

$$f(x_2) = f(4) = \frac{4^2}{4-2} = 8.$$

Możemy napisać odpowiedź.

Odpowiedź: W punkcie $x_1 = 0$ funkcja f ma maksimum lokalne właściwe, wynoszące $f(0) = 0$. W punkcie $x_2 = 4$ funkcja f ma minimum lokalne właściwe, wynoszące $f(4) = 8$.

ZADANIE 5. Określić dziedzinę D i wyznaczyć asymptoty pionowe wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+6x+5}$.

Rozwiązanie. Dziedzinę funkcji wyznaczamy z warunku:

$$x^2 + 6x + 5 \neq 0.$$

Równanie
$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
ma dwa rozwiązania: $x_1 = -1$ oraz $x_2 = -5$. (Korzystamy z wiadomości dotyczących trójmianów kwdratowych). Mamy więc dziedzinę funkcji i jest to zbiór
$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -5\}.$$

Możemy więc podejrzewać, że ewentualne asymptoty pionowe będą miały równania: $x = -1$ względnie $x = -5$. Zgodnie z tym, co napisano w tekście **Teoria20**, należy zbadać istnienie granic funkcji (zwykłych oraz jednostronnych) w punktach $x_1 = -1$ oraz $x_2 = -5$.

Otóż dla $x_1 = -1$ mamy:
$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2 + 6x + 5} = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x+5)} =$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{4},$$
a skoro jest to granica skończona, w tym punkcie nie ma asymptoty pionowej.

Natomiast dla $x_2 = -5$ mamy:
$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = \lim_{x \to -5^+} \frac{x+1}{x^2 + 6x + 5} = \lim_{x \to -5^+} \frac{x+1}{(x+1)(x+5)} =$$
$$= \lim_{x \to -5^+} \frac{1}{x+5} = +\infty,$$
i podobnie,
$$\lim_{x \to -5^-} f(x) = \lim_{x \to -5^=} \frac{x+1}{x^2 + 6x + 5} = \lim_{x \to -5^=} \frac{x+1}{(x+1)(x+5)} =$$
$$= \lim_{x \to -5^=} \frac{1}{x+5} = -\infty$$
(zobacz zadania dotyczące metod obliczania granic funkcji). To oznacza, że prosta pionowa o równaniu: $x = -5$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f. Mamy odpowiedź:

Odpowiedź: Dziedziną funkcji jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -5\}$. Wykres funkcji ma jedną asymptotę pionową i jest to prosta o równaniu: $x = -5$.

ZADANIE 6. Określić dziedzinę i wyznaczyć asymptoty pionowe wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+5}$.

Rozwiązanie. Dziedzinę funkcji wyznaczamy z warunku:

$$x^2 + 5 \neq 0,$$

a ponieważ liczba $x^2 + 5$ jest zawsze dodatnia, $x^2 + 5 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych, $D = \mathbb{R}$.

Funkcja f jest więc ciągła w całej dziedzinie i w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ istnieje skończona granica $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Zgodnie z tym, co napisano w tejście **Teoria20** oznacza to, że brak asymptot pionowych. Mamy odpowiedź:

Odpowiedź: Dziedziną funkcji jest zbiór $D = \mathbb{R}$. Wykres funkcji nie posiada żadnej asymptoty pionowej.

ZADANIE 7. Określić dziedzinę i wyznaczyć asymptoty ukośne wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$.

Rozwiązanie. Dziedzinę funkcji wyznaczamy z warunku:

$$x + 2 \neq 0.$$

Równanie

$$x + 2 = 0$$

ma jedno rozwiązanie: $x_1 = -2$. Mamy więc dziedzinę funkcji i jest to zbiór

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Zgodnie z twierdzeniem **1**, tekst **Teoria20**, wykres naszej funkcji będzie miał ukośną asymptotę prawostronną wtedy, gdy będą istniały skończone granice:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b.$$

Otóż mamy:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{x^2}{x+2}}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 2x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{x}} \right) = 1,$$

tak więc $a = 1$. Dalej mamy:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x^2-2x}{x-2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{1-\frac{2}{x}}\right) = -2,$$

tak więc $b = -2$. Asymptotą ukośną prawostronną jest zatem prosta o równaniu:

$$y = x - 2.$$

W podobny sposób sprawdzamy, że ta sama prosta jest jednocześnie asymptotą ukośną lewostronną.

Odpowiedź: Dziedziną funkcji jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Wykres funkcji ma jedną asymptotę ukośną i jest to prosta o równaniu: $y = x - 2$.

ZADANIE 8. Określić dziedzinę i wyznaczyć asymptoty ukośne wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x^3}{x+2}$.

Rozwiązanie. Dziedzinę funkcji wyznaczamy z warunku:

$$x + 2 \neq 0.$$

Równanie

$$x + 2 = 0$$

ma jedno rozwiązanie: $x_1 = -2$. Mamy więc dziedzinę funkcji i jest to zbiór

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Zgodnie z twierdzeniem **1**, tekst **Teoria20**, wykres naszej funkcji będzie miał ukośną asymptotę prawostronną wtedy, gdy będą istniały skończone granice:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a, \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = b.$$

Otóż mamy:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x^3}{x+2}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+2x}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{x}} \right) \right] = +\infty,$$

ponieważ $\dfrac{1}{1 + \frac{2}{x}} \to 1$, zaś $x \to +\infty$.

Nie jest to liczba skończona. Wobec tego asymptota ukośna prawostronna nie istnieje.

W podobny sposób sprawdzamy, że nie istnieje asymptota ukośna lewostronna.

Odpowiedź: Dziedziną funkcji jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Wykres funkcji nie posiada żadnej asymptoty ukośnej..

ZADANIE 9. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = x^3 - 12x$, $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Skorzystamy oczywiście z poprzednich zadań: z zadania **1** i z zadania **2.** Ale zaczniemy od tego, że dziedziną funkcji f jest przedział $(-\infty, +\infty)$. Należy zawsze w tego typu zadaniach wyznaczyć granice funkcji na końcach wszystkich przedziałów, z których składa sie jej dziedzina. W tym przypadku mamy do obliczenia dwie granice:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^3 - 12x \right) = \lim_{x \to -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{12}{x^2} \right) \right] = -\infty,$$

ponieważ

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{12}{x^2} \right) = 1 - 0 = 1.$$

Podobnie stwierdzamy, że

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^3 - 12x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{12}{x^2} \right) \right] = +\infty,$$

ponieważ

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{12}{x^2} \right) = 1 - 0 = 1.$$

W zadaniach **1** i **2** wyznaczyliśmy zarówno znak pochodnej, jak też jej miejsca zerowe, a także ekstrema lokalne funkcji f. Możemy to wszystko podsumować w "tabelce zmiennosci funkcji f":

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Należy jeszcze zbadać istnienie asymptot wykresu funkcji f (zob. tekst **Teoria20**). Jak widać ze wzoru na funkcję, asymptot pionowych brak. Zgodnie z twierdzeniem **1**, tekst **Teoria20**, wykres naszej funkcji będzie miał ukośną asymptotę prawostronną wtedy, gdy będą istniały skończone granice:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b.$$

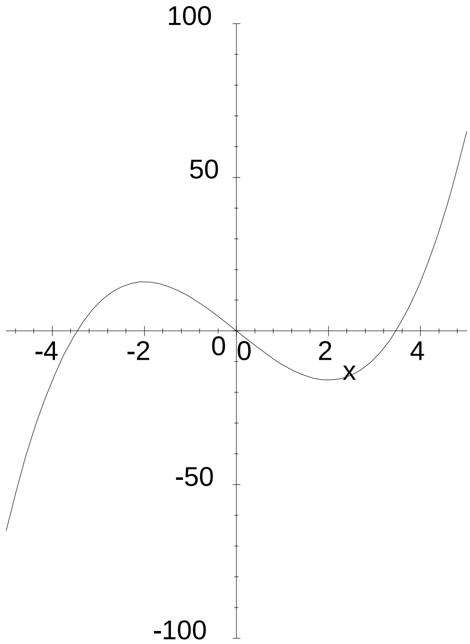
Otóż mamy:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3 - 12x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - 12\right) = +\infty$$

i nie jest to liczba skończona. Wobec tego asymptota ukośna prawostronna nie istnieje.

W podobny sposób sprawdzamy, że nie istnieje asymptota ukośna lewostronna. Wykres naszej funkcji nie posiada żadnych asymptot.

Odpowiedź: Wykres funkcji f wygląda mniej więcej tak:



$f(x) = x^3 - 12x$

ZADANIE 10. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Rozwiązanie. Skorzystamy oczywiście z poprzednich zadań: z zadania **3** i z zadania **4.** Ale zaczniemy od tego, że dziedziną funkcji f jest zbiór $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Należy zawsze w tego typu zadaniach wyznaczyć granice funkcji na końcach wszystkich przedziałów, z których składa sie jej dziedzina. W tym przypadku mamy do obliczenia cztery granice:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{x}{x-2}\right)\right] = -\infty,$$

ponieważ

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right) = 1.$$

Podobnie stwierdzamy, że

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{x}{x-2}\right)\right] = +\infty,$$

ponieważ

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right) = 1.$$

Pozostaje jeszcze wyznaczyć granice jednostronne - lewostronną i prawostronną - w punkcie $x = 2$. Metodami znanymi z teorii granic wyznaczamy te granice:

$$\lim_{x\to2^-}\left(\frac{x^2}{x-2}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to2^+}\left(\frac{x^2}{x-2}\right) = +\infty.$$

W zadaniach **3** i **4** wyznaczyliśmy zarówno znak pochodnej, jak też jej miejsca zerowe, a także ekstrema lokalne funkcji f. Możemy to wszystko podsumować w "tabelce zmienności funkcji f ":

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \vdots +\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Należy jeszcze zbadać istnienie asymptot wykresu funkcji f (zob. tekst **Teoria20**). Jak widać ze wzoru na funkcję, ma ona asymptotę pionową i jest to prosta o równaniu:

$$x = 2.$$

Zgodnie z twierdzeniem **1**, tekst **Teoria20**, wykres naszej funkcji będzie miał ukośną asymptotę prawostronną wtedy, gdy będą istniały skończone granice:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\qquad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b.$$

Otóż mamy:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{x}}\right)=1,$$

tak więc $a=1$. Dalej mamy:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x^2+2x}{x-2}\right)=$$

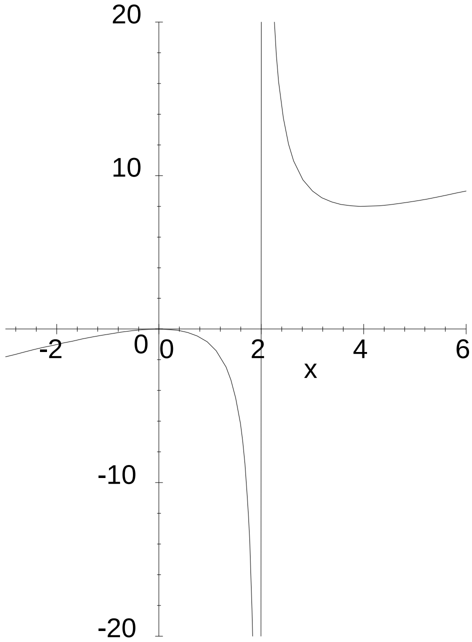
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1-\frac{2}{x}}\right)=2,$$

tak więc $b=2$. Asymptotą ukośną prawostronną jest zatem prosta o równaniu:

$$y=x+2.$$

W podobny sposób sprawdzamy, że ta sama prosta jest jednocześnie asymptotą ukośną lewostronną.

Odpowiedź: Wykres funkcji f wygląda mniej więcej tak:



$f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

(Komentarz: Asymptota pionowa $x = 2$ jest na rysunku nakreślona linią ciągłą, powinna zaś być to linia przerywana; natomiast asymptoty ukośnej, czyli prostej $y = x + 2$ nie udało się tu umieścić. Należy ją sobie dorysować.)

ZADANIE 11. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^3 - 3x$ w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$.

Rozwiązanie. Trzeba zapoznać się z tekstem **Teoria19**. Zgodnie z tym, co tam napisano, znajdujemy wszystkie punkty stacjonarne funkcji f w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$, czyli rozwiązania równania:

$$f'(x) = 0.$$

Obliczamy pochodną:

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x\right)' = 3x^2 - 3.$$

Należy zatem rozwiązać równanie

$$3x^2 - 3 = 0,$$

które jest równoważne równaniu

$$x^2 = 1.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 1,$$

i, jak widać, obydwa należą do przedziału $\langle -1, 3\rangle$.

Teraz znajdujemy wartości funkcji w punktach stacjonarnych:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(-1) = 2, \\ f(x_2) &= f(1) = -2, \end{aligned}$$

i dołączamy do nich wartości funkcji na końcach przedziału $\langle -1, 3\rangle$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2, \\ f(3) &= 18. \end{aligned}$$

Otrzymujemy zbiór liczb:

$$\{f(-1), f(3), f(x_1), f(x_2)\} = \{2, 18, 2, -2\}.$$

Największą liczbą w tym zbiorze jest oczywiście 18, zaś najmniejszą jest -2.

Odpowiedź: Największą wartością funkcji f w przedziale $\langle -1, 3\rangle$ jest $f(3) = 18$, a najmniejszą wartością tej funkcji w przedziale $\langle -1, 3\rangle$ jest $f(1) = -2$.

ZADANIE 12. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ w przedziale $\langle 0, 3\rangle$.

Rozwiązanie. Trzeba zapoznać się z tekstem **Teoria19**. Zgodnie z tym, co tam napisano, znajdujemy wszystkie punkty stacjonarne funkcji f w przedziale $\langle -1, 3\rangle$, czyli rozwiązania równania:

$$f'(x) = 0.$$

Obliczamy pochodną (ze wzoru na pochodną ilorazu):

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x)' \cdot (x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Należy zatem rozwiązać równanie

$$\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0,$$

które jest równoważne równaniu

$$1-x^2.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania:

$$x_1=-1, \qquad x_2=1,$$

i, jak widać, tylko $x_2 = 1$ należy do przedziału $\langle 0,3\rangle$.

Teraz znajdujemy wartość funkcji w punkcie stacjonarnym x_2:

$$f\left(x_2\right)=f\left(1\right)=\frac{1}{2},$$

i dołączamy wartości funkcji na końcach przedziału $\langle 0,3\rangle$:

$$\begin{aligned} f\left(0\right) &= 0, \\ f\left(3\right) &= \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy zbiór liczb:

$$\left\{f\left(0\right), f\left(3\right), f\left(x_2\right)\right\}=\left\{0, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Największą liczbą w tym zbiorze jest oczywiście $\frac{1}{2}$, zaś najmniejszą jest 0.

Odpowiedź: Największą wartością funkcji f w przedziale $\langle 0,3\rangle$ jest $f\left(1\right)=\frac{1}{2}$, a najmniejszą wartością tej funkcji w przedziale $\langle 0,3\rangle$ jest $f\left(0\right)=0$.