CIĄGI

klasa II 2018/19

Adam Stachura

Teoria1: Ciągi. Własności ogólne

1. Definicje

Ciągiem **nieskończonym** (krótko: ciągiem) nazywamy funkcję $a : \mathbb{N}_k \to \mathbb{R}$ przyporządkowującą każdej liczbie $n \in \mathbb{N}_k$ liczbę rzeczywistą $a(n) = a_n$:

$$a : \mathbb{N}_k \to \mathbb{R}, \qquad n \to a(n) = a_n.$$

Liczbę a_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu, zaś n - wskaźnikiem (indeksem). Ciąg oznaczamy symbolami: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_k}$, lub: (a_n) , $n \in \mathbb{N}_k$, lub krótko: (a_n).

Zbiór $\{a_n : n \in \mathbb{N}_k\}$nazywamy zbiorem wyrazów ciągu (a_n).

Wyrazy ciągu (a_n) można uporządkować zgodnie ze wzrostem wskaźników:

$$(a_n) = (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ...)$$

2. Monotoniczność ciągu

Dany jest ciąg (a_n) , $n \in \mathbb{N}_k$.

Ciąg (a_n) nazywamy **rosnącym**, jeżeli $a_n < a_{n+1}$ dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_k$.

Ciąg (a_n) nazywamy **słabo rosnącym** lub **niemalejącym**, jeżeli $a_n \leq a_{n+1}$ dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_k$.

Ciąg (a_n) nazywamy **malejącym**, jeżeli $a_n > a_{n+1}$ dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_k$.

Ciąg (a_n) nazywamy **słabo malejącym** lub **nierosnącym**, jeżeli $a_n \geq a_{n+1}$ dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_k$.

3. Ograniczoność ciągu

Ciąg (a_n) , $n \in \mathbb{N}_k$, nazywamy **ograniczonym z góry**, jeżeli istnieje taka liczba rzeczywista M, że $a_n \leq M$ dla wszystkich liczb naturalnych $n \in \mathbb{N}_k$. Każdą liczbę M o tej własności nazywamy **ograniczeniem górnym** ciągu (a_n) .

Ciąg (a_n) , $n \in \mathbb{N}_k$, nazywamy **ograniczonym z dołu**, jeżeli istnieje taka liczba rzeczywista m, że $a_n \geq m$ dla wszystkich liczb naturalnych $n \in \mathbb{N}_k$. Każdą liczbę m o tej własności nazywamy **ograniczeniem dolnym** ciągu (a_n) .

Ciąg (a_n) , $n \in \mathbb{N}_k$, nazywamy **ograniczonym**, jeżeli jest on ograniczony z góry i z dołu jednocześnie.

Teoria 2: Ciągi arytmetyczne

1. Definicja

Ciąg (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, nazywamy **ciągiem arytmetycznym** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista r (**nie zależąca od n**) taka, że równość

$$a_{n+1} = a_n + r$$

zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_1$.

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu (a_n).

2. n-ty wyraz ciągu arytmetycznego

Jeżeli ciąg (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r, to dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_1$ zachodzi równość:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r.$$

3. Suma n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego

Jeżeli ciąg (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r, zaś

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

jest sumą n kolejnych wyrazów tego ciągu (od pierwszego do n-tego włącznie), to dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_1$ zachodzi równość:

$$S_n = \frac{2na_1 + rn\,(n-1)}{2}$$

lub, w innej nieco postaci:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n.$$

Teoria 3: Ciągi geometryczne

1. Definicja

Ciąg (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, nazywamy **ciągiem geometrycznym** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista q (**nie zależąca od n**) taka, że równość

$$a_{n+1} = a_n q$$

zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_1$.

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu (a_n).

2. n-ty wyraz ciągu geometrycznego

Jeżeli ciąg (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q, to dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_1$ zachodzi równość:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

3. Suma n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego

Jeżeli ciąg (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie $q \neq 1$, zaś

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

jest sumą n kolejnych wyrazów tego ciągu (od pierwszego do n-tego włącznie), to dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_1$ zachodzi równość:

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Jeżeli zaś ciąg (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie $q = 1$, to jest to ciąg stały:

$$(a_n) = (a_1, a_1, a_1, ...)$$

i wtedy oczywiście

$$S_n = na_1.$$

Teoria4: Lokaty bankowe

Posiadacz lokaty bankowej (może to być konkretna osoba bądź firma lub inny podmiot) zobowiązuje się w umowie zawartej z danym bankiem do wpłacenia na konto lokaty określonej sumy pieniędzy (kapitał początkowy) i pozostawienia tej sumy przez cały czas trwania lokaty (też określony w umowie) na koncie. W tym czasie bank dysponuje pieniędzmi właściciela, płacąc mu w zamian za to wynagrodzenie w formie odsetek dopisywanych co pewien czas do kapitału znajdującego się na koncie lokaty. Wielkość tych odsetek ustala się w umowie w formie tzw. oprocentowania lokaty, podawanego w stosunku rocznym. Przy tym odsetki dodawane są do sumy zgromadzonej na koncie co pewien czas, zwany okresem kapitalizacji odsetek. Jeżeli ten okres nie równa się 1 rokowi, tylko stanowi pewną jego część, np. $\frac{1}{m}$-tą część roku, a oprocentowanie lokaty wynosi $p\%$ w stosunku rocznym, to to oznacza, że po upływie każdego okresu kapitalizacji bank dodaje do sumy zgromadzonej na lokacie albo $\frac{p}{m}\%$ kapitału początkowego (tzw. **procent prosty**), albo też $\frac{p}{m}\%$ sumy już zgromadzonej na lokacie (tzw. **procent składany**).

Cały ten proces opiszemy uwzględniając następujące parametry:

K - kapitał początkowy;

p - oprocentowanie lokaty w stosunku rocznym, wyrażone w procentach;

l - czas trwania lokaty, wyrażony w latach (nie musi to być liczba całkowita);

m - liczba okresów kapitalizacji w ciągu jednego roku (również nie musi to być liczba całkowita, chociaż najczęściej nią jest);

n - liczba okresów kapitalizacji w czasie trwania lokaty, tj. w przeciągu l lat (tak więc $n = ml$);

K_n - kapitał końcowy, zgromadzony na koncie lokaty po upływie czasu jej trwania, czyli po upływie n okresów kapitalizacji.

Interesuje nas właśnie wielkość K_n, którą można obliczyć stosując następujące wzory:

(A) Procent prosty:

$$K_n = K + \frac{Kpn}{100m} \tag{1}$$

albo (druga, równoważna wersja wzoru)

$$K_n = K + \frac{Kpl}{100}. \tag{2}$$

(B) Procent składany:

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^n \tag{3}$$

albo (druga, równoważna wersja wzoru)

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{ml}. \tag{4}$$

Uwzględnianie opodatkowania lokat:

Jeżeli chcemy uwzględniać opodatkowanie lokat (w zadaniu będzie zawsze określone, czy należy to czynić), stosujemy rozumowanie następujące.

W każdym okresie rozliczeniowym (okresie kapitalizacji odsetek) różnica pomiędzy sumą znajdującą się na koncie lokaty na początku tego okresu, powiedzmy K_1, oraz sumą powiększoną o przypadające na dany okres odsetki, powiedzmy K_2, czyli liczba

$$D = K_2 - K_1$$

stanowi zysk, czyli dochód uzyskany przez właściciela lokaty w ciągu tego okresu. Dochód ten może podlegać opodatkowaniu w formie tzw. podatku od dochodów kapitałowych. Polega to na tym, że bank przy końcu rozważanego okresu przekazuje urzędowi podatkowemu określony w ustawie procent **dochodu** posiadacza lokaty, czyli liczby D. Powiedzmy, że ustawa określa opodatkowanie dochodów kapitałowych w wysokości $q\%$. Wobec tego po upływie rozważanego okresu na koncie lokaty znajdzie się suma

$$K_2' = K_2 - \frac{q}{100} \cdot D.$$

Aby obliczyć, ile wyniesie kapitał końcowy K_n' zgromadzony na koncie lokaty po upływie czasu jej trwania (czyli n okresów rozliczeniowych), należy w każdym ze wzorów (1), (2), (3), (4) zastąpić parametr p przez p', gdzie

$$p' = p - \frac{q}{100} \cdot p. \tag{5}$$

Teoria5: Kredyty bankowe

Kredyt - to po prostu pożyczka. Udzielający kredytu bank pożycza kredytobiorcy (może to być konkretna osoba, firma bądź inny podmiot) pewną sumę pieniędzy, stanowiącą właśnie zaciągnięty kredyt. Biorący kredyt zobowiązuje się do spłaty tej sumy wraz z należnymi bankowi odsetkami, których wielkość określa tzw. oprocentowanie kredytu. Oprocentowanie to podaje się w stosunku rocznym. Kredytobiorca spłaca kredyt oraz odsetki w pewnej liczbie rat, w przeciągu określonego czasu (czas ten oraz liczbę rat określa umowa). Będziemy zakładać, że raty są spłacane regularnie, a okres pomiędzy kolejnymi ratami nazwiemy okresem spłat pojedynczej raty (okresem rozliczeniowym). Pierwsza rata jest spłacana po upływie jednego takiego okresu od daty zawarcia umowy, druga rata - po upływie dwóch takich okresów, itd. Rozważymy dwa systemy spłacania kredytu - **system równych rat** oraz **system rat malejących.**

Cały proces opiszemy uwzględniając następujące parametry:

K - zaciągnięty kredyt;

p - oprocentowanie kredytu w stosunku rocznym, wyrażone w procentach;

l - czas spłaty kredytu, wyrażony w latach;

m - liczba okresów spłat pojedynczej raty (okresów rozliczeniowych) w ciągu jednego roku;

n - całkowita liczba rat do spłacenia (tak więc $n = ml$);

$R_1, R_2, ..., R_n$ - wysokość kolejnych rat.

Z punktu widzenia dłużnika istotna jest właśnie wielkość kolejnych rat. Można ją wyznaczyć z następujących wzorów:

(A) System równych rat. Jak sama nazwa wskazuje, w tym systemie wszystkie raty są równe, a ich wspólną wartość oznaczymy przez R, tak więc

$$R_1 = R_2 = ... = R_n = R.$$

Wielkość R określa wzór:

$$R = \frac{K}{\left(\frac{1}{1+\frac{p}{100m}}\right) + \left(\frac{1}{1+\frac{p}{100m}}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{1+\frac{p}{100m}}\right)^n}, \tag{1}$$

czyli

$$R = K \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\frac{p}{100m}}\right)^k\right]^{-1}.$$

(B) System rat malejących. W tym systemie kolejne raty wyliczamy ze wzorów:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{K}{n} + \frac{p}{100m} \cdot K, \\ R_2 &= \frac{K}{n} + \frac{p}{100m} \cdot \left(K - \frac{K}{n} \right), \\ R_3 &= \frac{K}{n} + \frac{p}{100m} \cdot \left(K - \frac{2K}{n} \right), \\ &\cdots \\ R_n &= \frac{K}{n} + \frac{p}{100m} \cdot \left(K - \frac{(n-1)\,K}{n} \right), \end{aligned} \tag{2}$$

lub, inaczej,

$$R_k = \frac{K}{n} + \frac{p}{100m} \cdot \left(K - \frac{(k-1)\,K}{n} \right), \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Teoria6: Granica ciągu

1. Definicja

Dany jest ciąg (a_n), $n \in \mathbb{N}_k$, i liczba rzeczywista $g \in \mathbb{R}$. Mówimy, że ciąg (a_n) **ma granicę** g (jest zbieżny do granicy g lub dąży do g) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dodatniej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna $n_0 \in \mathbb{N}_k$ taka, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ spełniona jest nierówność:

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Piszemy wtedy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g.$$

Ciąg, który ma granicę, nazywamy ciągiem **zbieżnym**. Ciąg nie posiadający granicy nazywamy ciągiem **rozbieżnym**.

(Uwaga: Stosuje się także, obok wskazanego, oznaczenia: $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$, a nawet krótko: $a_n \to g$, to ostatnie oczywiście tylko wtedy, gdy nie ma wątpliwości, który wskaźnik dąży do nieskończoności).

2. Działania na ciągach zbieżnych

TWIERDZENIE 1 *("twierdzenie o działaniach na ciągach zbieżnych").*

Dane są ciągi zbieżne (a_n) *i* (b_n), $n \in \mathbb{N}_1$, *oraz liczba rzeczywista* $c \in \mathbb{R}$. *Wtedy zbieżne są także ciągi* (ca_n), $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n b_n)$, $n \in \mathbb{N}_1$, *i prawdziwe są równości:*

$$\lim_{n\to\infty} (ca_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *to zbieżny jest również ciąg* $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ *i ma miejsce równość*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n},$$

przy czym ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *jest określony w zbiorze tych wszystkich wskaźników* $n \in \mathbb{N}_1$, *dla których* $b_n \neq 0$.

3. Pożyteczne wzory z teorii granic

Każdy ciąg stały, czyli taki ciąg (a_n), $n \in \mathbb{N}_k$, że $a_n = c$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_k$ (gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

Warto również pamiętać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$$

dla każdej liczby rzeczywistej $r > 0$.

(Np. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$, itd.)

Także

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$$

dla każdej liczby rzeczywistej a takiej, że $|a| < 1$.

(Np. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} (0,999999)^n = 0$, itd.)

Prawdziwe są też równości:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$, oraz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Teoria7: Dalsze twierdzenia dotyczące ciągów zbieżnych

FAKT 1. *Każdy ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.*

FAKT 2. *Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem ograniczonym.*
(**Uwaga**: Stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, istnieją ciągi ograniczone, które nie mają granicy, są więc rozbieżne).

FAKT 3. *Jeżeli ciąg jest zbieżny, to każdy jego podciąg także jest zbieżny i to do tej samej granicy, do której zbieżny jest dany ciąg.*

FAKT 4. *Każdy ciąg niemalejący (w szczególności, każdy ciąg rosnący) i ograniczony z góry jest zbieżny.*

FAKT 5. *Każdy ciąg nierosnący (w szczególności, każdy ciąg malejący) i ograniczony z dołu jest zbieżny.*

FAKT 6. *Każdy ciąg stały, czyli taki ciąg* (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, *że* $a_n = c$ *dla każdej liczby* $n \in \mathbb{N}_1$ *(gdzie* $c \in \mathbb{R}$ *jest ustaloną liczbą rzeczywistą) jest zbieżny i*

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

TWIERDZENIE 2 *("twierdzenie o nierównościach dla granic").*
Dane są ciągi zbieżne (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$ *i* (b_n), $n \in \mathbb{N}_1$. *Jeżeli istnieje liczba naturalna* $n_0 \in \mathbb{N}_1$ *taka, że* $a_n \leq b_n$ *dla każdej liczby naturalnej* $n \geq n_0$, *to wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Potocznie, choć niezbyt ściśle, mówi się: Nierówność zachowuje się przy przejściu do granicy. (**Uwaga**: Nierówność silna może się zamienić na słabą przy takim przejściu, np. $\frac{1}{n} > 0$ dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_1$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \geq 0$, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.)

TWIERDZENIE 3 *("twierdzenie o trzech ciągach").*
Dane są ciągi zbieżne (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$ *i* (c_n), $n \in \mathbb{N}_1$, *oraz ciąg* (b_n), $n \in \mathbb{N}_1$. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ *oraz istnieje liczba naturalna* $n_0 \in \mathbb{N}_1$ *taka, że*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$, *to wówczas ciąg* (b_n), $n \in \mathbb{N}_1$, *jest zbieżny i zachodzą równości:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Teoria8: Granice niewłaściwe

1. Definicja

Dany jest ciąg (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$. Mówimy, że ciąg (a_n) **ma granicę niewłaściwą** $+\infty$ (jest zbieżny w niewłaściwym sensie do $+\infty$ lub jest rozbieżny do $+\infty$, lub dąży do $+\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dodatniej liczby $M > 0$ istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ spełniona jest nierówność:

$$a_n > M.$$

Piszemy wtedy: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Dany jest ciąg (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$. Mówimy, że ciąg (a_n) **ma granicę niewłaściwą** $-\infty$ (jest zbieżny w niewłaściwym sensie do $-\infty$ lub jest rozbieżny do $-\infty$, lub dąży do $-\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej ujemnej liczby $m < 0$ istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ spełniona jest nierówność:

$$a_n < m.$$

Piszemy wtedy: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

2. Podstawowe twierdzenia

FAKT 1. *Jeżeli ciąg ma granicę niewłaściwą $+\infty$ (lub $-\infty$, odpowiednio), to każdy jego podciąg także ma granicę niewłaściwą $+\infty$ (lub $-\infty$, odpowiednio).*

FAKT 2. *Każdy ciąg niemalejący i nieograniczony z góry ma granicę niewłaściwą $+\infty$. Każdy ciąg nierosnący i nieograniczony z dołu ma granicę niewłaściwą $-\infty$.*

TWIERDZENIE 1 *(twierdzenie o działaniach na ciągach rozbieżnych). Dane są ciągi (a_n), (b_n), $.n \in \mathbb{N}_1$.*

(a) Jeżeli $a_n \to A$ $(A \in \mathbb{R})$ i $b_n \to +\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

Jeżeli $a_n \to A$ $(A \in \mathbb{R})$ i $b_n \to -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$.

Jeżeli $a_n \to +\infty$ i $b_n \to +\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

Jeżeli $a_n \to -\infty$ i $b_n \to -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$.

(b) Jeżeli $a_n \to A$, $A \neq 0$ i $b_n \to +\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \begin{cases} +\infty, & \textit{gdy } A > 0, \\ -\infty, & \textit{gdy } A < 0. \end{cases}$

Jeżeli $a_n \to A,\ A \neq 0$ *i* $b_n \to -\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = \begin{cases} -\infty, & gdy\ A > 0, \\ +\infty, & gdy\ A < 0. \end{cases}$

Jeżeli $a_n \to +\infty$ *i* $b_n \to +\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = +\infty$.

Jeżeli $a_n \to +\infty$ *i* $b_n \to -\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = -\infty$.

Jeżeli $a_n \to -\infty$ *i* $b_n \to -\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = +\infty$.

(c) Jeżeli $a_n \to A\ (A \in \mathbb{R})$ *i* $b_n \to \pm\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$.

Jeżeli $a_n \to 0$ *i* $a_n > 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right) = +\infty$.

Jeżeli $a_n \to 0$ *i* $a_n < 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right) = -\infty$.

TWIERDZENIE 2.

Dane są ciągi $a_n,\ n \in \mathbb{N}_1$ *i* $(b_n)\,,\ n \in \mathbb{N}_1$. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *oraz istnieje liczba naturalna* $n_0 \in \mathbb{N}_1$ *taka, że* $a_n \leq b_n$ *dla każdej liczby naturalnej* $n \geq n_0$, *to wówczas* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

TWIERDZENIE 3.

Dane są ciągi $a_n,\ n \in \mathbb{N}_1$ *i* $(b_n)\,,\ n \in \mathbb{N}_1$. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ *oraz istnieje liczba naturalna* $n_0 \in \mathbb{N}_1$ *taka, że* $a_n \leq b_n$ *dla każdej liczby naturalnej* $n \geq n_0$, *to wówczas* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

3. Pożyteczne wzory

Warto pamiętać, że dla każdej liczby rzeczywistej $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^r = +\infty.$$

(Np. $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, itd.)
Także dla każdej liczby rzeczywistej a takiej, że $a > 1$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

(Np. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (1,000001)^n = +\infty$, itd.)

Teoria 9: Szeregi geometryczne zbieżne

1. Definicja

Dany jest ciąg geometryczny (a_n), $n \in \mathbb{N}_1$, o ilorazie $q \in \mathbb{R}$. **Szeregiem geometrycznym** o wyrazie ogólnym $a_n = a_1 q^{n-1}$ nazywamy ciąg sum częściowych (S_n), $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $n \in \mathbb{N}_1$. Szereg taki oznaczamy symbolami:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{lub} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}.$$

Szereg nazywamy **zbieżnym**, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n), $n \in \mathbb{N}_1$, jest zbieżny, zaś jego granicę $S = \lim_{n\to\infty} a_1 q^{n-1}$ nazywamy **sumą** danego szeregu geometrycznego i piszemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad \text{lub} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = S.$$

Uwaga: Stosuje się także, obok wskazanych, zapis:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = S \qquad \text{lub} \qquad a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... = S.$$

2. Główne (i jedyne) twierdzenie

TWIERDZENIE 1 *Dany jest szereg geometryczny* $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$, *w którym pierwszy wyraz jest różny od zera,* $a_1 \neq 0$.

Szereg ten jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jego iloraz q *spełnia warunek:*

$$|q| < 1.$$

Suma szeregu jest wówczas określona wzorem:

$$S = \frac{a_1}{1-q},$$

co zapisujemy krótko:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q} \qquad \text{lub} \qquad a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... = \frac{a_1}{1-q}.$$